样条函数精度的某些问题研究*1)

赵雁翔 王仁宏
(大连理工大学数学科学研究所, 大连 116024)

摘 要

样条函数的精度是 Schoenberg 于 1946 年在 [20] 中首次提到的. 本文在 Schoenberg 工作的基础上, 进一步讨论了这种样条的精度和跨度之间的联系, 并且构造了某些特殊样条满足精度最大条件下的跨度最小. 然后, 我们还讨论了当一元样条的问题推广到多元的时候, 如何将所要考虑的问题用多元的工具加以描述, 从而能够将某些特殊的多元 box 样条的精度和跨度之间的联系做进一步的研究.

关键词: 样条精度, 样条跨度, box 样条
MR (2000) 主题分类: 65D07

SOME PROBLEM OF SPLINE'S EXACTNESS

Zhao Yanxiang Wang Renhong
(*Institute of Mathematical Science, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

Abstract

Spline's exactness is firstly mentioned in [20] by Schoenberg in 1946. In this paper, we further investigate the relationship between the spline'exactness and its span, and construct a special spline with minimal span when its exactness reach the maximum. Then, we consider how to describe the above problem with multivariate mathematical tool when we extend the univariate case to multivariate one so that we can continuously investigate certain multivariate box splines with their exactness and span.

Keywords: Spline's Exactness, Spline's Span, Box Spline
2000 Mathematics Subject Classification: 65D07

1. 一元样条的精度和跨度

1.1 基本定义

Schoneberg 在 [20] 中对样条进行了较为详细的研究. 尤其是对样条的精度和跨度的工作对以后样条函数的研究影响深远.

* 2004 年 5 月 28 日收到.
1) 国家自然科学基金 (批准号: No.69973010, No.10271022, No.60373093) 和广东省自然科学基金 (批准号: No.021755) 资助项目.

在[20]中, 样条的定义如下:

定义 1.1. 定义在实轴上的实函数 $F(x)$ 如果满足如下的性质:

(1) 由一系列次数不超过 $k-1$ 的分段多项式所组成;

(2)$F(x) \in C^{k-2}(-\infty,+\infty)$;

(3) 当 k 为偶数时, $F(x)$ 以整数点为结点; 当 k 为奇数时, $F(x)$ 以半整点 $(x=n+\frac{1}{2}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为结点.

则称它为 k 阶样条, 并且记做 $\Pi_k(x)$.

这里, 我们称 $\Pi_k(x)$ 具有次数 $k-1$, 连续性 $k-2$. 由定义可知, $\Pi_1(x)$ 是一个阶梯函数, 它仅在 $x=n+\frac{1}{2}$ 处不连续. $\Pi_2(x)$ 是一个通常的折线函数, 其顶点在整点 $x=n$.

样条函数的重要性就在于可以利用样条的线性组合来得到所需求的满足一定阶数和连续性的新的样条. 我们的主要工作也就是试图寻找样条的特定线性组合, 以此来构造出新样条的某些特殊的性质. 如果没有特别说明, 下面研究的样条均指这种等间距 (间距为 1) 的并且是偶函数的样条.

定义 1.2. 称由如下表达式描述的函数为 k 阶 B- 样条:

$$M_k(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin u/2}{u/2})^k\ e^{iux}du \quad (k=1,2,\cdots;-\infty<x<+\infty). \tag{1}$$

在[20]中, Schoenberg 给出了 B- 样条的差分格式,

$$M_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin u/2}{u/2})^k\ e^{iux}du = \frac{1}{(k-1)!}\delta^k x_+^{k-1} \tag{2}$$

并且 B- 样条是具有最小紧支撑集的 k 阶样条函数.

我们下面的工作就是以 k 阶 B- 样条 (1) 及其特征函数

$$g_k(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_k(x)e^{iux}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} M_k(x)\cos uxdx \tag{3}$$

为工具来研究某些样条函数性质的. 其中第二个等号成立是因为 $M_k(x)$ 为偶函数. 显然这里 $g_k(u)=(\frac{\sin u/2}{u/2})^k$.

定义 1.3. 如果关系式

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n)F(x-n) \tag{4}$$

对于至多 k 次多项式均成立, 则称样条 $F(x)$ 具有 k 次精度, 这个条件其实等价于如下的关系式

$$x^\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^\nu F(x-n) \quad (\nu=0,1,\cdots,k) \tag{5}$$

成立.

定义 1.4. 样条 $F(x)$ 具有跨度 s, 是指 $F(x)$ 的紧支撑集的 Lebesgue 测度为 s. 即, 偶函数 $F(x)$ 当 $x>s/2$ 时为 0, 但是对 $x>s'/2(s'<s)$, $F(x)$ 并不完全为 0.

至此, 我们给出了衡量样条 $F(x)$ 的 4 个指标: 次数 $m(D^m)$, 连续性 $\mu(C^\mu)$, 精度 $k(E^k)$, 跨度 s. Schoenberg 在[20]的工作主要是构造特殊的样条, 以满足给定的次数, 连续性, 精度, 跨度.

在介绍我们的主要工作之前, 我们先给定一个样条精度的判定定理, 它也是我们下面主要工作的最主要的理论依据.

定理 1.1. 令样条 $F(x)$ 的特征函数为 $g(u)$, 样条 $F(x)$ 具有 $k-1$ 次精度, 如果下面两个条件同时成立:

(1) $u=0$ 为 $g(u)-1$ 的 k 重根,

(2) $u=2\pi n(n\neq 0)$ 为 $g(u)$ 的 k 重根.

1.2 B- 样条及其特征函数的基本性质

由于我们是以 k 阶 B- 样条 (1) 及其特征函数 (3) 为工具的, 因此有必要首先介绍一下 B- 样条及其特征函数的若干性质.

定理 1.2. k 阶 B- 样条 (1) 具有次数 $k-1(D^{k-1})$, 连续性 $k-2(C^{k-2})$, 精度 $1(E^1)$, 以及跨度 k.

由 k 阶 B- 样条 (1) 的特征函数为 $g_k(u)=(\frac{\sin u/2}{u/2})^k$, 并且注意到定理 1.1, 再简单运用 Laurent 展开, 很容易得到上面的结论.

定理 1.3. 任意的样条 $\Pi_k(x)$ 均能被唯一表示成如下形式,

$$\Pi_k(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n M_k(x-n), \tag{6}$$

其中 y_n 是适当取定的系数. 上面的式子由于 $M_k(x)$ 的紧支撑性, 所以必然是收敛的. 因此 $\Pi_k(x)$ 是紧支撑的当且仅当 $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 只有有限个非零元素.

1.3 样条的精度和跨度之间的关系

Schoneberg 在[20]中构造了上几个特殊的样条, 它们满足一定的精度和跨度. 因此, 精度和跨度之间的关系自然就成为了我们所要考虑的问题. 简言之, $\Pi_k(x)$ 的精度最大能达到多少? 当精度达到最大的时候, $\Pi_k(x)$ 的跨度最小能达到多少?

下面的结论回答了这个问题.

定理 1.4. k 阶样条 $\Pi_k(x)$ 能达到的精度最大值是 $k-1$, 此时跨度所能达到的最小值是

$$s=\begin{cases} 2k-2 & \text{当 } k \text{ 是偶数}, \\ 2k-1 & \text{当 } k \text{ 是奇数}. \end{cases} \quad (k\geq 2) \tag{7}$$

证明. 首先考虑 k 阶样条中具有最小跨度的 B- 样条 $M_k(x)$,

$$M_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin u/2}{u/2})^k\cdot e^{iux}du, \tag{8}$$

由于 $M_k(x)$ 的特征函数为 $g_k(u)$,

$$g_k(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}M_k(x)\cdot e^{-iux}dx=(\frac{\sin u/2}{u/2})^k \tag{9}$$

由复分析的相关理论知道

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\right)^k &= \left[\frac{1}{u/2}\cdot\left(\frac{u}{2}-\frac{(u/2)^3}{3!}+\frac{(u/2)^5}{5!}-\cdots\right)\right]^k\\ &= \left(1-\frac{(u/2)^2}{3!}+\frac{(u/2)^4}{5!}-\cdots\right)^k\\ &= 1+u^2\cdot\ (\text{关于 } u \text{ 的某个正则函数}).\end{aligned}$$

即

$$\left(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\right)^k-1=u^2\cdot\ (\text{关于 } u \text{ 的某个正则函数}). \tag{10}$$

故 $g_k(u)-1$ 在 $u=0$ 处是 2 重根.

另外, 容易知道 $(\frac{\sin(u/2)}{u/2})^k$ 在 $u=2\pi n(n\neq 0)$ 处是 k 重根, 从而 $M_k(x)$ 的精度为 1, 并且有跨度 k.

其次考虑 k 阶样条中具有次小跨度的函数 $L(x)$, 由定理 1.3, 次小的跨度是 $k+2$, 此时 $L(x)$ 具有如下的形式:

$$L(x)=y_{-1}M_k(x+1)+y_0M_k(x)+y_1M_k(x-1), \tag{11}$$

其中 $y_{-1}=y_1$. 我们来考虑当参数 y_{-1}, y_0, y_1 取特定的值时, $L(x)$ 的精度最多能达到多少.

仍然考虑 $L(x)$ 的特征函数 $g_k(u)$, 此时

$$\begin{aligned}g_k(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty}L(x)\,e^{-iux}dx\\ &= \left(y_{-1}\,e^{iu}+y_0+y_1\,e^{-iu}\right)\left(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\right)^k,\end{aligned}$$

利用 Laurent 展开, 有

$$\begin{aligned}g_k(u) &= \left(1-\frac{u^2}{24}+\cdots\right)\left(y_0+2y_1\left(1+\frac{(iu)^2}{2!}+\frac{(iu)^4}{4!}+\cdots\right)\right)\\ &= \left(1-\frac{u^2}{24}+\cdots\right)\left((y_0+2y_1)+2y_1\cdot\frac{(iu)^2}{2!}+\cdots\right)\end{aligned}$$

由于 y_0, y_1 是参变量, 我们可以取定特殊的 y_0, y_1, 使得上面的 Laurent 展开式满足:

a) 常数项为 1,

b) u^2 项系数为 0.

这时我们就有

$$g_k(u)-1=u^4\cdot(\text{关于 } u \text{ 的某个正则函数}). \tag{12}$$

故, $g_k(u)-1$ 在 $u=0$ 处是 4 重根. 另外, 容易知道 $g_k(u)$ 在 $u=2\pi n(n\neq 0)$ 处是 k 重根. 从而当跨度次小 $(s=k+2)$ 的时候, k 阶样条的精度最大可以达到 3.

同样的, 当 $s=k+4$ 时, 对应的 k 阶样条的精度最大可以达到 5.

注意到 $g_k(u)$ 在 $u=2\pi n(n\neq 0)$ 处是 k 重根, 由定理 1.1 知, 不可能有 k 阶样条的精度超过 $k-1$. 故而, 上面的方法类推, 当 $s=2k-2(k$ 为偶数) 时, 精度可以达到 $k-1$, 此后 s 再增大, 精度不会再增大; 当 $s=2k-1(k$ 为奇数) 时, 精度可以达到 $k-1$, 此后 s 再增大, 精度不会再增大.

有了这些准备工作, 我们可以说明定理中的主要结论. 假定精度为 $k-1$ (此时不妨设 k 为偶数) 时, 跨度所能达到的最小值为 $2k-4$, 那么按照上面的结论, 这时精度至多能达到 $k-3$, 与精度为 $k-1$ 是矛盾的.

由于[20]出现的时间较早, 不确定前人是否考虑过此问题, 笔者特地求教了样条方面的专家, 包括 Prof. Carl de Boor, Prof. Amos Ron 等, 但是均未给出明确的答复.

2. 多元 box 样条的精度和跨度

2.1 一些定义和符号

定义 2.1. 对于任意的可重集 $X=\{x^1,\ldots,x^n\}\subset R^s\backslash\{0\}$, $\langle X\rangle=spanX=R^s$, box 样条 $B(x|X)$ 由如下关系定义:

$$\int_{R^s} f(x)B(x|X)dx=\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} f(t_1x^1+\ldots+t_nx^n)dt_1\ldots dt_n,\ \forall f\in D(R^s) \tag{13}$$

其中 $D(R^s)$ 表示定义在 R^s 上无穷次可微的紧支撑函数全体.

我们在这里采用比较通用的多元符号: $\alpha,\beta\in Z^s$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_s$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_s^{\alpha_s}$, $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_s!$, $\binom{\alpha}{\beta}=\alpha!/\beta!(\alpha-\beta)!$. 并且记 P 为实多项式全体构成的空间, P_k 为所有次数不超过 k 的实多项式全体构成的空间,

$$P_k=P_k(R^s)=\left\{\sum_{|\alpha|\leq k}c_\alpha x^\alpha : c_\alpha\in R\right\}.$$

D_i, D^α 为微分算子,

$$D_if(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x),\quad D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_s^{\alpha_s}}f(x).$$

这里讨论的 box 样条满足 $X\subset Z^s$, 其基本性质在[8], [9], [14], [15], [16] 中有详细的介绍. 由于 Carl de Boor 在[8],[9]所采用的符号较难理解, 我们在这里所采用的是 W. Dahmen 和 C. A.Micchelli 在[14], [15], [16] 中所采用的记号. 并且为了与一元的情况保持一致, 所采用的积分区域为 (13) 中的 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n$, 而不是 Carl de Boor, W. Dahmen 和 C. A.Micchelli 等常用的 $[0,1]^n$.

box 样条中一个重要的研究对象是空间

$$\ell(X) = span\{B(x-\alpha|X) : \alpha \in Z^s\}. \tag{14}$$

为了能更好的描述空间 (14) 中的多项式, 下面定义几个关于 Box 样条的集合,

$$\hat{Y}(X) = \{Y \subset X : \langle X \backslash Y \rangle \neq R^s\} \tag{15}$$

$f(x)$ 的方向导数 $D_y f(x)$, $y \in R^s$ 定义为

$$D_y f(x) = \sum y_i D_i f(x) \tag{16}$$

记

$$D(X) = \left\{ f : f \in C^\infty(R^s), D_Y f = 0, Y \in \hat{Y}(X) \right\} \tag{17}$$

这里 $D_Y = \prod_{y \in Y} D_y$, 或者,

$$D(X) = \bigcap_{Y \in \hat{Y}(X)} \ker D_Y. \tag{18}$$

2.2 矩形剖分 box 样条的精度

对于多元 box 样条考虑的是在空间

$$\ell(X) = span\{B(x-\alpha|X) : \alpha \in Z^s\} \tag{19}$$

中, 当样条的精度达到最大的时候, 相应的跨度最小为多少. 由于跨度事实上就是样条函数紧支撑集的测度, 因此后面用 supp 来表示跨度. 在多元情况下样条精度不好刻划, 下面我们换[15],[16]中用到的方法来代替样条的精度.

定义 2.2. 由关系式:

$$(S_\phi f)(x) = \sum_{\alpha \in Z^s} f(\alpha)\phi(x-\alpha) \tag{20}$$

确定的关于 $\phi(x)$ 的算子称为 Schoenberg 算子.

样条精度在多元的情况下其实就是指在 Schoenberg 算子作用下保持不变的多项式的最高次数.

我们的主要目的是在 $\ell(X)$ 中寻找 $\phi(x)$, 使得 $\phi(x)$ 对应的 Schoenberg 算子 S_ϕ 对 $D(X)$ 保持不变, 并且 supp ϕ 能达到最小. S_ϕ 对 $D(X)$ 保持不变, 是指对任意的 $f(x) \in D(X)$, 都有 $(S_\phi f)(x) = f(x)$. 这个问题已经部分的由 W.Dahmen 和 C.A.Micchelli 在[14]中解决, 他们给出了如下的定理:

定理 2.1. 令 $X \subset Z^s \backslash \{0\}$ 为有限可重集且 $\langle X \rangle = R^s$. 则对于任意的 $y \in R^s \backslash c(X)$, 存在数列 $\{d_\alpha : \alpha \in b(x|X)\}$ 使得 Schoenberg 算子 S_ϕ 对 $D(X)$ 保持不变. 这里 $\phi(x) = \sum_{\beta \in b(x|X)} d_\beta B(x+\beta|X)$.

显然这里构造的 $\phi(x)$ 满足 $\operatorname{supp}\phi(x) = \mathrm{Vol}_s\left(\bigcup_{\alpha\in b(y|X)}(X[0,1]^s+\alpha)\right)$. 但 $\operatorname{supp}\phi(x)$ 给出的并非最好的下界. 为了说明这一点, 我们来看矩形剖分的 $B(x|X)$.

当 $s=2$, $e^1=(1,0)$, $e^2=(0,1)$, 并且

$$X=\{\underbrace{e^1,\ldots,e^1}_{m_1},\underbrace{e^2,\ldots,e^2}_{m_2}\}$$

这时 $B(x|X)$ 是张量积形式的 box 样条, 也即

$$B(x|X)=M_{m_1}(x_1)\cdot M_{m_2}(x_2). \tag{21}$$

这种情况下很容易得到定理 1.4 的如下推广:

定理 2.2. 当 $s=2$ 且 $X=\{\underbrace{e^1,\ldots,e^1}_{m_1},\underbrace{e^2,\ldots,e^2}_{m_2}\}$, 存在 $\phi(x)\in\ell(X)$, 使得 Schoenberg 算子 S_ϕ 对 $D(x)$ 保持不变, 同时 $\operatorname{supp} B(x|X)$ 达到最小的

$$\left(m_1-\frac{(3+(-1)^{m_1})}{2}\right)\cdot\left(m_2-\frac{(3+(-1)^{m_2})}{2}\right). \tag{22}$$

证明的方法与定理 1.4 完全类似, 只需要注意 (21) 即可.

2.3 进一步的工作

对于一般的 $B(x|X)$, 由定理 2.1 可以保证 $\ell(X)$ 中样条函数对 $D(X)$ 的插值代数精度, 但是如何来确定 $\phi(x)\in\ell(X)$ 使得 $\operatorname{supp}\phi(x)$ 达到最小却是一个较复杂的问题. 还应当指出的是, 定理 1.4 和定理 2.2 的寻求最小紧支撑的方法对于一般的 $B(x|X)$ 并不适用. 它只是针对特殊形式的样条函数所采取的特殊方法而已.

注意到在多元的情况下是用 $D(X)$ 代替一元的样条精度来衡量样条函数的插值性质的优劣的. 在 ([16]) 中 W. Dahmen 和 C.A. Micchelli 引入了 P_ϕ, 并且讨论了 $P_{B(x|X)}$ 和 $D(X)$ 之间的关系, 指出了 $D(X)$ 是 $P_{B(x|X)}$ 的一个仿射不变子空间. $P(x)$ 的仿射不变子空间是指它的子集 P 满足

a) P 是 $\prod$ 的子空间;

b) 对任意的 $p\in P$, 有 $p(ax+y)\in P$, 其中 $a\in\mathbf{C}$,$y\in R^s$.

对 $P_{B(x|X)}$ 的任意一个放射不变子空间 P, W. Dahmen 和 C.A. Micchelli 证明了 $P\subseteq\ell(X)$, 并且 Schoenberg 算子 S_ϕ 是 P 上的双射. 因此我们可以很自然的考虑 $P_{B(x|X)}$ 的极大仿射不变子空间 P', 极大仿射不变子空间就是指除了本身, 没有别的不变子空间可以包括 P'. 在什么情况下 P' 与 $D(X)$ 相等? 是否可以用 P' 代替 $D(X)$ 来衡量多元样条的插值性质? 也就是说是否存在 $\phi(x)\in\ell(X)$ 使得 Schoenberg 算子 S_ϕ 对 P' 保持不变? 如果存在这样的 $\phi(x)$, 可以进一步考虑这样的 $\phi(x)$ 是否唯一, 如果不唯一, 如何寻找具有最小紧支撑集的 $\phi(x)$?

参 考 文 献

[1] 王仁宏, 多元齿的结构与插值, 数学学报, **18** (1975), 91–106.

[2] 王仁宏, 施锡泉, 罗钟铉, 苏志勋, 多元样条函数及其应用, 科学出版社, 北京, 1994.

[3] 王仁宏, 数值逼近, 高等教育出版社, 北京, 1999.

[4] 余家荣, 复变函数, 高等教育出版社, 北京, 1992.

[5] 许志强, 大连理工大学博士学位论文, 2003.

[6] (美) 崔锦泰, 小波分析导论, 西安交通大学出版社, 西安, 1995.

[7] C. de Boor, On the uniform approximation by splines, *J. Approx. Theory.* 1, 219–235.

[8] C. de Boor, Splines as linear combination of B-splines, in "Approximation Theory II", G.G. Lorentz, C.K. Chui and L.L. Schumaker (eds.), Acad. Press, New York, 1976, 1–47.

[9] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider, *Box Splines*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[10] C. de Boor, Q. Jia, A sharp upper bound on the approximation order of smooth bivariate pp functions, *J. Approx. Theory*, **72** (1993), 24–33.

[11] Ward Cheney, Will Light, 逼近论教程 (英文版), A Course in Approximation Theory, China Machine Press, Beijing, 2004.1

[12] C. K. Chui and R. H. Wang, Multivariate spline spaces, *Jour. Math. Anal. Appl.*, **94** (1983), 197–221.

[13] C. K. Chui and R. H. Wang, Multivariate B-splines on triangulation rectangles, *Jour. Math. Anal. Appl.*, **92** (1983), 533–551.

[14] W. Dahmen, C. A. Micchelli, On the solution of certain systems of partial difference equations and linear dependence of translates fo box splines, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **292** (1985), 305–320.

[15] W. Dahmen, C. A. Micchelli, On the local linear independence of translate of a box spline, *studia Math.*, **82** (1985), 243–163.

[16] W. Dahmen, C. A. Micchelli, Translates of multivariate splines, *linear Algebra Appl.*, **52/53** (1983), 217–234.

[17] Rong-Qing Jia, Multivariate Discrete Splines and Linear Diophantine Equations, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **340** (1993), 179–197.

[18] Rong-Qing Jia, Symmetric Magic Squares and Multivariate Splines, *Linear Algrbra Appl.*, **250** (1997), 69–103.

[19] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, New, York, 1973.

[20] I. J. Schoenberg, Contribution to the problem of application of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, 4 (1946), 45–99; 112–141.

[21] G. Strang and J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.