# PROBLEMS

*Solutions to problems in this issue should arrive no later than* ***1 January 2014****. An asterisk (⋆) after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

*Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, 7, and 9, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, 8, and 10, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.*

*The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.*

**3757**. *Correction. Proposed by Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbia.*

Let $A$, $B$, $C$ be the angles (measured in radians), $R$ the circumradius and $r$ the inradius of a triangle. Prove that

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\le\frac{9}{2\pi}\cdot\frac{R}{r}.$$

**3761**. *Proposed by Peter Saltzman, Berkeley, CA, USA; and Stan Wagon, Macalester College, St. Paul, MN, USA.*

Let $B_{m,n}$ be a graph of possible moves by a white bishop on an $m\times n$ chessboard, where we assume $m\le n$ and that the lower-left square is white.

(a) For which pairs of positive integers $(m,n)$ does $B_{m,n}$ have a Hamiltonian cycle?

(b) Show that the edges of $B_{m,n}$ can be coloured using $\Delta$ colours so that intersecting edges are coloured differently, where $\Delta$ is the maximum degree.

**3762**. *Proposed by Bill Sands, University of Calgary, Calgary, AB.*

Three sides of a cyclic quadrilateral $ABCD$ have lengths $AB=1$, $BC=2$ and $CD=3$, and one of the angles of the quadrilateral equals $60^\circ$. Find all possible lengths of $AD$.

**3763**. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let $a,b,c$ be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c}{2c+a+b}\le\frac{a}{2b+2c}+\frac{b}{2c+2a}+\frac{c}{2a+2b}\,.$$

**3764**. *Proposed by D. M. Bătineţu-Giurgiu, Matei Basarab National College, Bucharest, Romania; and Neculai Stanciu, George Emil Palade Secondary School, Buzău, Romania.*

Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a positive real sequence such that $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{n} = a \in \mathbb{R}^+$. Compute

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}!}}{n+1} - \frac{\sqrt[n]{a_n!}}{n}\right),$$

where $a_1! = a_1$ and $a_n! = a_n \cdot a_{n-1}!$ for $n > 1$.

**3765**. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $ABC$ be a triangle with circumcircle $\Gamma$ and orthocentre $H$ and let the circle with diameter $AH$ intersect $\Gamma$ again at $K$. Prove that

(a) $KB \cdot HC = KC \cdot HB$.

(b) the lines $KB$, $HC$ meet on the circle tangent to $\Gamma$ at $K$ and passing through $H$.

**3766**. *Proposed by Max A. Alekseyev, University of South Carolina, Columbia, SC, USA.*

Let $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ be positive integers such that

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x^3.$$

Prove that $x_k = k$ for each $k = 1, 2, \ldots, n$.

**3767**. *Proposed by Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbia.*

Let $R, r$ be the circumradius and inradius of a right-angled triangle. Prove that

$$\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq 2\sqrt{2}.$$

**3768**$\star$. *Proposed by Abdilkadir Altintaş, mathematics teacher, Emirdağ, Turkey.*

In the equilateral triangle $ABC$, $E$ and $D$ lie on side $AC$ such that $\angle EBD = 30^\circ$, $AE = x$, $ED = y$ and $DC = z$. Show that

$$y^2 = (x+z)^2 - xz.$$

**3769**. *Proposed by Panagiote Ligouras, Leonardo da Vinci High School, Noci, Italy.*

Let $a$, $b$, and $c$ be the sides, $r$ the inradius and $R$ the circumradius of a triangle $ABC$. Prove that

$$\frac{a^3c}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3a}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3b}{c^2+ca+a^2} \geq 6rR.$$

**3770**. *Proposed by William Gosnell, Amherst, MA, USA.*

Given a right-angled triangle with legs $a, b$ and hypotenuse $c$. Assume that the square of the hypotenuse is equal to twice the triangle's area plus its perimeter. Also assume that $c - a = 1$. Find $a$, $b$ and $c$ in terms of $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**3757**. *Correction. Proposé par Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbie.*

Dénotons par $A$, $B$ et $C$ les angles d'un triangle, mesurés en radians, par $R$ le rayon de son cercle circonscrit et par $r$ le rayon de son cercle inscrit. Démontrer

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \leq \frac{9}{2\pi} \cdot \frac{R}{r}.$$

**3761**. *Proposé par Peter Saltzman, Berkeley, CA, É-U; et Stan Wagon, Macalester College, St. Paul, MN, É-U.*

Soit $B_{m,n}$ un graphe des mouvements possibles du fou blanc sur un échiquier de dimensions $m \times n$, en supposant que $m \leq n$ et que la case inférieure gauche est blanche.

(a) Pour quelles paires d'entiers positifs $(m, n)$ le graphe $B_{m,n}$ possède-t-il un cycle Hamiltonien ?

(b) Montrer que les arêtes de $B_{m,n}$ peuvent être colorées avec $\Delta$ couleurs de sorte que les arêtes qui se coupent sont de couleur différente, $\Delta$ étant le degré maximal.

**3762**. *Proposé par Bill Sands, Université de Calgary, Calgary, AB.*

Trois côtés d'un quadrilatère cyclique $ABCD$ sont de longueur $AB = 1$, $BC = 2$ et $CD = 3$, et un des angles du quadrilatère vaut $60°$. Trouver toutes les longueurs possibles de $AD$.

**3763**. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit $a, b, c$ trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{a}{2b+2c} + \frac{b}{2c+2a} + \frac{c}{2a+2b}.$$

**3764**. *Proposé par D. M. Bătineţu-Giurgiu, Collège National Matei Basarab, Bucarest, Roumanie ; et Neculai Stanciu, École secondaire George Emil Palade, Buzău, Roumanie.*

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive telle que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = a \in \mathbb{R}^+$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}!}}{n+1} - \frac{\sqrt[n]{a_n!}}{n} \right),$$

où $a_1! = a_1$ et $a_n! = a_n \cdot a_{n-1}!$ pour $n > 1$.

**3765**. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $ABC$ un triangle, $\Gamma$ son cercle circonscrit, $H$ son orthocentre et soit $K$ la deuxième intersection du cercle de diamètre $AH$ avec $\Gamma$. Montrer que

(a) $KB \cdot HC = KC \cdot HB$.

(b) les droites $KB$, $HC$ se coupent sur le cercle tangent à $\Gamma$ en $K$ et passant par $H$.

**3766**. *Proposé par Max A. Alekseyev, Université de la Caroline Sud, Columbia, SC, USA.*

Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ des entiers positifs tels que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x^3 .$$

Montrer que $x_k = k$ pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$.

**3767**. *Proposé par Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbie.*

Soit respectivement $R, r$ les rayons des cercles circonscrit et inscrit d'un triangle rectangle. Montrer que

$$\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq 2\sqrt{2} .$$

**3768**★. *Proposé par Abdilkadir Altintaş, enseignant en mathématiques, Emirdağ, Turquie.*

Dans le triangle équilatéral $ABC$, on suppose que les points $E$ et $D$ situés sur le côté $AC$ de sorte que $\angle EBD = 30^\circ$, $AE = x$, $ED = y$ et $DC = z$. Montrer que

$$y^2 = (x+z)^2 - xz .$$

**3769**. *Proposé par Panagiote Ligouras, École Secondaire Léonard de Vinci, Noci, Italie.*

Soit $a$, $b$, et $c$ les côtés, $r$ le rayon du cercle inscrit et $R$ celui du cercle circonscrit d'un triangle $ABC$. Montrer que

$$\frac{a^3c}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3a}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3b}{c^2+ca+a^2} \geq 6rR .$$

**3770**. *Proposé par William Gosnell, Amherst, MA, USA.*

On donne un triangle rectangle de côtés $a$ et $b$ et d'hypoténuse $c$. On suppose que le carré de l'hypoténuse est égal au double de l'aire du triangle plus son périmètre. De plus, on suppose que $c - a = 1$. Trouver $a$, $b$ et $c$ en fonction de $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.