Алгебра и логика, 54, № 4 (2015), 520—528

DOI: 10.17377/alglog.2015.54.407 УДК 510.53

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА n-РАЗРЕШИМЫХ СТРУКТУР, КАТЕГОРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО m-РАЗРЕШИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ*)

Е. Б. ФОКИНА, С. С. ГОНЧАРОВ, В. ХАРИЗАНОВА, О. В. КУДИНОВ, Д. ТУРЕТСКИ

§ 1. Предварительные сведения

В данной статье мы рассматриваем только счётные структуры вычислимой сигнатуры. Такая структура называется *вычислимой*, если её носитель представим как множество натуральных чисел ω, и при этом все базисные отношения и функции структуры $\mathcal{A}$ равномерно вычислимы. Конечные структуры всегда вычислимы. Структура называется *n-разрешимой*, где $n \geq 0$, если её Σ_n-диаграмма разрешима. В частности, структура 0-разрешима тогда и только тогда, когда она вычислима.

Здесь и далее в работе мы используем обозначение $\mathcal{M}_i$ для (частичной) вычислимой структуры, вычислимой с помощью машины Тьюринга с номером i, где $i \in \omega$. *Индексным множеством* произвольного класса структур K называется множество

$$I(K) = \{i \in \omega : \mathcal{M}_i \in K\}$$

Работа 1-го и 5-го из авторов выполнена при финансовой поддержке Австрийского Научного Фонда FWF, проекты V 206 и I 1238, 2-го и 4-го из авторов — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-91001-АНФ_а, и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ, проект НШ-860.2014.1.

всех индексов вычислимых структур из K. В случаях, когда индексное множество класса гиперарифметично, говорим, что у класса K есть характеризация. Индексные множества описывают вычислимые структуры класса K, поэтому классы с гиперарифметическим индексным множеством мы считаем хорошо описываемыми.

Нас интересует сложность изоморфизмов между вычислимыми представлениями счётной структуры. Основным понятием в данном направлении исследований является понятие вычислимой категоричности (или автоустойчивости). Это понятие используется в вычислимой теории моделей с тех пор, как Фролих и Шефердсон построили пример двух изоморфных, вычислимых полей, между которыми нет вычислимого изоморфизма [1]. Мальцев [2] изучал вопрос единственности конструктивных нумераций модели. Им было введено понятие рекурсивно устойчивой модели. Позже в [3] он построил изоморфные, вычислимые векторные пространства бесконечной размерности, не являющиеся вычислимо изоморфными. В той же работе он ввёл понятие автоустойчивой модели, эквивалентное понятию вычислимо категоричной модели. С тех пор определение вычислимой категоричности было релятивизовано относительно произвольных тьюринговых степеней $\mathbf{d}$. Понятие широко используется в исследованиях в данной области (см., напр., [4, 5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вычислимая структура $\mathcal{M}$ $\mathbf{d}$-*вычислимо категорична* (или $\mathbf{d}$-*автоустойчива*), если для любой вычислимой структуры $\mathcal{A}$, изоморфной $\mathcal{M}$, существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм, отображающий $\mathcal{M}$ на $\mathcal{A}$. В случае $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ структура $\mathcal{M}$ называется *вычислимо категоричной* (или *автоустойчивой*).

Вычислимая структура $\mathcal{M}$ называется *относительно вычислимо категоричной*, если для каждой её счётной изоморфной копии $\mathcal{A}$ существует изоморфизм, вычислимый относительно атомной диаграммы $\mathcal{A}$.

Доуни, Кэч, Лемпп, Льюис, Монталбан и Туретски [6] доказали, что не существует простой синтаксической характеризации вычислимой категоричности. Точнее, они показали, что индексное множество вычислимо категоричных структур Π^1_1-полно. Используя методы из [6, 7], Гончаров, Баженов и Марчук [8] показали, что индексные множества вычислимых структур алгоритмической размерности $n > 1$ также Π^1_1-полны. С другой стороны, индексное множество относительно вычислимо категоричных структур Σ^0_3-полно [2].

Недавно Гончаров начал изучение сложности понятия категоричности, ограниченное только на разрешимые структуры [9–11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Структура $\mathcal{A}$ называется *разрешимо категоричной* (или *автоустойчивой относительно сильных конструктивизаций*), если любые два разрешимых представления структуры $\mathcal{A}$ вычислимо изоморфны.

Гончаров и Марчук [12] показали, что индексное множество вычислимых, разрешимо категоричных структур $\Sigma^0_{\omega+2}$-полно, тогда как индексное множество разрешимых, разрешимо категоричных структур Σ^0_3-полно. Индексное множество разрешимо категоричных структур с различными алгебраическими, теоретико-модельными и алгоритмическими свойствами изучались в [8, 13–15].

В данной работе мы рассматриваем n-разрешимые структуры и их категоричность относительно m-разрешимых копий для $m \leq n \in \omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём структуру $\mathcal{A}$ *категоричной относительно m-разрешимых представлений* (или *автоустойчивой относительно m-конструктивизаций*), если любые две m-разрешимые копии структуры $\mathcal{A}$ вычислимо изоморфны.

В частности, вычислимая категоричность эквивалентна категоричности относительно 0-разрешимых представлений.

Результаты статьи представлены в следующей таблице.

n-разрешимые $n \geq 2$	m-разрешимо категоричные $m \leq n-2$	Π^1_1-полно	Следствие 1
n-разрешимые $n \geq 1$	$(n-1)$-разрешимо категоричные	Π^0_4-полно	Следствие 2
n-разрешимые $n \geq 0$	m-разрешимо категоричные $m \geq n$	Σ^0_3-полно	Предложение

§ 2. Сложность индексных множеств

Рассмотрим сначала n-разрешимые, категоричные относительно n-разрешимых представлений структуры.

ТЕОРЕМА 1. *Индексное множество n-разрешимых, категоричных относительно n-разрешимых представлений структур Π^1_1-полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что индексное множество вычислимо категоричных структур Π^1_1-полно [6]. Это означает, что для каждого Π^1_1-множества S существует равномерно вычислимая последовательность структур $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\omega}$, для которой верно, что $i \in S \iff \mathcal{A}_i$ вычислимо категорична.

В [16] Маркер определил $\forall$- и $\exists$-расширения ($\mathcal{A}_\forall$ и $\mathcal{A}_\exists$ соответственно) произвольной структуры $\mathcal{A}$. Важным свойством данных расширений является тот факт, что носитель и основные отношения структуры $\mathcal{A}$ определимы в $\mathcal{A}_\forall, \mathcal{A}_\exists$ универсальными или экзистенциальными формулами соответственно. Расширения можно применять последовательно друг за другом естественным образом. Определим B_i как результат применения маркеровского ($\forall\exists$)-расширения n раз. Из свойств, доказанных в [17] или [18], следует: если $\mathcal{A}_i$ вычислима, то B_i n-разрешима. Далее, из свойств маркеровских расширений, доказанных в [19], следует, что A_i вычислимо категорична тогда и только тогда, когда B_i категорична относительно n-разрешимых представлений. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для всех $m \geq n \geq 0$ индексное множество n-разрешимых, категоричных относительно m-разрешимых представлений структур Π^1_1-полно.*

Следующим шагом рассмотрим 1-разрешимые вычислимо категоричные структуры. Другими словами, теперь мы временно не накладываем дополнительных условий на разрешимость копий структуры за исключением стандартного требования вычислимости.

ТЕОРЕМА 2. *Индексное множество 1-разрешимых вычислимо категоричных структур Π^0_4-полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим оценку сверху, т. е. принадлежность классу Π_4^0. Напомним, что через $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i\in\omega}$ обозначается эффективная последовательность частичных вычислимых структур.

Отношение „структура $\mathcal{M}_i$ n-разрешима“ является Σ_3^0-множеством, т. к. оно утверждает, что существует частично вычислимая функция f с областью значений $\{0,1\}$, определённая на парах $(\phi(\overline{x}), \overline{a})$, где $\phi(\overline{x})$ — Σ_n-формула в сигнатуре структуры $\mathcal{M}_i$ и $\overline{a} \in \mathcal{M}_i^{<\omega}$ — это такая последовательность элементов, что

f всюду определена;

если формула $\phi(\overline{x})$ бескванторна, то

$$f(\phi(\overline{x}), \overline{a}) = 1 \iff \mathcal{M}_i \models \phi(\overline{a});$$

если $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ — Π_{n-1} формула, то

$$f(\exists \overline{y}\, \phi(\overline{x}, \overline{y}), \overline{a}) = 1 \iff \exists \overline{b}\, f(\neg\phi(\overline{x}, \overline{y}), \overline{a}\overline{b}) = 0.$$

Рассмотрим следующие отношения на парах (i, j):

$$\begin{aligned} (i,j) \in E \quad &\iff \quad \text{$\mathcal{M}_i$ и $\mathcal{M}_j$ — тотальные структуры, между которыми} \\ &\qquad\quad \text{существует вычислимый изоморфизм,} \\ (i,j) \in F \quad &\iff \quad \text{$\mathcal{M}_i$ и $\mathcal{M}_j$ — тотальные структуры, между которыми} \\ &\qquad\quad \text{существует Δ_2^0-изоморфизм.} \end{aligned}$$

Очевидно, отношение E принадлежит Σ_3^0, а отношение F принадлежит Σ_4^0.

Рассмотрим теперь следующее свойство вычислимой структуры $\mathcal{A}$:

$(*)$ для любой вычислимой структуры $\mathcal{B}$ из существования Δ_2^0-изоморфизма $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ следует существование также и вычислимого изоморфизма $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

Как отношение на индексах i, данное отношение может быть записано следующим образом:

$$\forall j\, F(i, j) \to E(i, j),$$

т. е. является Π_4^0-отношением.

Заметим, что свойство $(*)$ — это ослабление свойства вычислимой категоричности. Доуни, Кэч, Лемпп и Турецки [20] показали, что вычислимо категоричные 1-разрешимые структуры относительно Δ^0_2-категоричны. Внимательный анализ их доказательства показывает, что они на самом деле пользовались не исходным определением вычислимой категоричности, а свойством $(*)$. Таким образом, они доказали, что справедлива следующая

ЛЕММА. *Каждая* 1*-разрешимая структура, обладающая свойством* $(*)$*, относительно* Δ^0_2*-категорична.*

Заметим, что любая относительно Δ^0_2-категоричная структура, обладающая свойством $(*)$, обязательно вычислимо категорична. Таким образом, структура 1-разрешима и вычислимо категорична тогда и только тогда, когда она 1-разрешима и обладает свойством $(*)$. Тогда отношение „структура $\mathcal{M}_i$ 1-разрешима и вычислимо категорична“ может быть записано конъюнкцией Σ^0_3-формулы и Π^0_4-формулы, т. е. принадлежит Π^0_4.

Для доказательства Π^0_4-полноты воспользуемся известным методом кодирования вычислимых семейств функций в 1-разрешимые унары (структуру, в которую закодировано семейство S, обозначим как $\mathcal{M}_S$), детали конструкции см. в [21, 22]. Основное свойство конструкции — семейство S обладает единственной с точностью до эквивалентности вычислимой нумерацией тогда и только тогда, когда унар $\mathcal{M}_S$ вычислимо категоричен. Таким образом, индексное множество вычислимых семейств функций с единственной вычислимой нумерацией m-сводится к исследуемому нами индексному множеству. Упомянутое индексное множество для вычислимых семейств функций изучалось в [23], где доказана его Π^0_4-полнота. $\square$

Используя технику маркеровских расширений, несложно обобщить данный результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для произвольного* $n \geq 1$ *индексное множество n-разрешимых структур, категоричных относительно* $(n-1)$*-разрешимых представлений,* Π^0_4*-полно.*

Гончаров [24] доказал, что 2-разрешимые вычислимо категоричные структуры относительно вычислимо категоричны. Доуни, Кэч, Лемпп и Туретски [20] показали, что индексное множество относительно вычислимо категоричных структур Σ^0_3-полно. На самом деле они показали, что индексное множество 2-разрешимых вычислимо категоричных структур Σ^0_3-полно. Применяя технику маркеровских расширений, получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для произвольных $n \geq 2$ и $m \leq n-2$ индексное множество n-разрешимых структур, категоричных относительно m-разрешимых представлений, Σ^0_3-полно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Fröhlich, J. Shepherdson*, Effective procedures in field theory, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **248**, No. 950 (1956), 407—432.
2. *А. И. Мальцев*, Конструктивные алгебры. 1, УМН, **16**, № 3 (1961), 3—60.
3. *А. И. Мальцев*, О рекурсивных абелевых группах, Докл. АН СССР, **146**, № 5 (1962), 1009—1012.
4. *S. S. Goncharov*, Autostable models and algorithmic dimensions, in: Yu. L. Ershov (ed.) et al., Handbook of recursive mathematics. Vol. 1: Recursive model theory (Stud. Logic Found. Math., **138**), Amsterdam, Elsevier, 1998, 261—287.
5. *E. B. Fokina, V. Harizanov, A. Melnikov*, Computable model theory, in: R. Downey (ed.), Turing's Legacy: Developments from Turing's ideas in logic (Lect. Notes Log., **42**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, Assoc. Symbol. Logic, 2014, 124—194.
6. *R. G. Downey, A. M. Kach, S. Lempp, A. E. M. Lewis-Pye, A. Montalbán, D. D. Turetsky*, The complexity of computable categoricity, Adv. Math., **268** (2015), 423—466.
7. *С. С. Гончаров*, Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций, Алгебра и логика, **19**, № 6 (1980), 621—639.
8. *С. С. Гончаров, Н. А. Баженов, М. И. Марчук*, Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций булевых алгебр, Сиб. матем. ж., **56**, № 3 (2015), 498—512.
9. *С. С. Гончаров*, Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, в сб. Алгоритмические вопросы алгебры и логики. К 80-летию

со дня рождения акад. С. И. Адяна, Тр. МИАН, **274**, М., МАИК, 2011, 119—129.

10. *С. С. Гончаров*, Об автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций почти простых моделей, УМН, **65**, № 5(395) (2010), 107—142.
11. *С. С. Гончаров*, Автоустойчивость простых моделей относительно сильных конструктивизаций, Алгебра и логика, **48**, № 6 (2009), 729—740.
12. *С. С. Гончаров, М. И. Марчук*, Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей, Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., **13**, № 4 (2013), 43—67.
13. *С. С. Гончаров*, Индексные множества почти простых конструктивных моделей, Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., **13**, № 3 (2013), 38—52.
14. *С. С. Гончаров, М. И. Марчук*, Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей ограниченной сигнатуры, Алгебра и логика, **54**, № 2 (2015), 163—192.
15. *С. С. Гончаров, М. И. Марчук*, Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей нетривиальных сигнатур, Докл. АН, **461**, № 2 (2015), 140—142.
16. *D. Marker*, Non Σ_n axiomatizable almost strongly minimal theories, J. Symb. Log., **54**, No. 3 (1989), 921—927.
17. *U. Andrews, J. S. Miller*, Spectra of theories and structures, Proc. Am. Math. Soc., **143**, No. 3 (2015), 1283—1298.
18. *С. С. Гончаров, Б. Хусаинов*, Сложность теорий вычислимых категоричных моделей, Алгебра и логика, **43**, № 6 (2004), 650—665.
19. *E. B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller*, Degrees of categoricity of computable structures, Arch. Math. Logic, **49**, No. 1 (2010), 51—67.
20. *R. G. Downey, A. M. Kach, S. Lempp, D. D. Turetsky*, Computable categoricity versus relative computable categoricity, Fundam. Math., **221**, No. 2 (2013), 129—159.
21. *С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов*, Конструктивные модели (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга, 1999.
22. *О. В. Кудинов*, Автоустойчивая 1-разрешимая модель без вычислимого семейства Скотта $\exists$-формул, Алгебра и логика, **35**, № 4 (1996), 458—467.
23. *М. Куммер, С. Вехнер, К. Йи*, Дискретные семейства рекурсивных функций и индексные множества, Алгебра и логика, **33**, № 2 (1994), 149—165.

24. *С. С. Гончаров*, Автоустойчивость и вычислимые семейства конструктивизаций, Алгебра и логика, **14**, № 6 (1975), 647—680.

Поступило 12 сентября 2015 г.

Адреса авторов:

FOKINA, Ekaterina B., Vienna Univ. of Tech., Inst. Discr. Math. Geom., Wiedner Hauptstraße 8-10/104, 1040 Vienna, AUSTRIA.

e-mail: ekaterina.fokina@tuwien.ac.at

ГОНЧАРОВ Сергей Савостьянович,

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4,

Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2,

г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ.

e-mail: s.s.goncharov@math.nsc.ru

HARIZANOV, Valentina, Dep. Math., George Washington Univ., Washington, DC 20052 USA. e-mail: harizanv@gwu.edu.

КУДИНОВ Олег Викторович,

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4,

Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2,

г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ.

e-mail: kud@math.nsc.ru

TURETSKY, Daniel D., Kurt Gödel Research Center for Math. Log., Univ. Vienna, Währinger Straße 25, 1090 Vienna, AUSTRIA.

e-mail: dturets@gmail.com

Algebra and Logic, Vol. 54, No. 4, September, 2015
(Russian Original Vol. 54, No. 4, July-August, 2015)

INDEX SETS FOR n-DECIDABLE STRUCTURES CATEGORICAL RELATIVE TO m-DECIDABLE PRESENTATIONS

E. B. Fokina,[1*] S. S. Goncharov,[2] V. Harizanov,[3]**
O. V. Kudinov,[4] and D. Turetsky[5*]**

UDC 510.53

Keywords: *index set, structure categorical relative to n-decidable presentations, n-decidable structure categorical relative to m-decidable presentations.*

We say that a structure is categorical relative to n-decidable presentations (or autostable relative to n-constructivizations) if any two n-decidable copies of the structure are computably isomorphic. For $n = 0$, we have the classical definition of a computably categorical (autostable) structure. Downey, Kach, Lempp, Lewis, Montalbán, and Turetsky proved that there is no simple syntactic characterization of computable categoricity. More formally, they showed that the index set of computably categorical structures is Π^1_1-complete. Here we study index sets of n-decidable structures that are categorical relative to m-decidable presentations, for various $m, n \in \omega$. If $m \geq n \geq 0$, then the index set is again Π^1_1-complete, i.e., there is no nice description of the class of n-decidable structures that are categorical relative to m-decidable presentations. In the case $m = n - 1 \geq 0$, the index set is Π^0_4-complete, while if $0 \leq m \leq n - 2$, the index set is Σ^0_3-complete.

*Supported by Austrian Science Fund FWF (projects V 206 and I 1238).

**Supported by RFBR (project No. 13-01-91001-ANF_a) and by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (grant NSh-860.2014.1).

[1]Vienna University of Technology, Institute of Discrete Mathematics and Geometry, Wiedner Hauptstraße 8-10/104, 1040 Vienna, Austria; ekaterina.fokina@tuwien.ac.at [2]Sobolev Institute of Mathematics, pr. Akad. Koptyuga 4, Novosibirsk, 630090 Russia. Novosibirsk State University, ul. Pirogova 2, Novosibirsk, 630090 Russia; s.s.goncharov@math.nsc.ru. [3]George Washington Univ., Washington, DC 20052 USA; harizanv@gwu.edu. [4]Sobolev Institute of Mathematics, pr. Akad. Koptyuga 4, Novosibirsk, 630090 Russia. Novosibirsk State University, ul. Pirogova 2, Novosibirsk, 630090 Russia; kud@math.nsc.ru. [5]Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic, University of Vienna, Währinger Straße 25, 1090 Vienna, Austria; dturets@gmail.com. Translated from *Algebra i Logika*, Vol. 54, No. 4, pp. 520-528, July-August, 2015. Original article submitted September 12, 2015.

1. PRELIMINARIES

We consider only countable structures for computable languages. Such a structure $\mathcal{A}$ is said to be *computable* if its universe can be identified with the set ω of natural numbers in such a way that the relations and operations of $\mathcal{A}$ are uniformly computable. A finite structure is always computable. A structure $\mathcal{A}$ is said to be *n-decidable*, for $n \geq 0$, if the Σ_n-diagram of $\mathcal{A}$ is decidable. In particular, a structure is 0-decidable iff it is computable.

Throughout the paper, we denote by $\mathcal{M}_i$ the (partial) computable structure computed by the ith Turing machine, where $i \in \omega$. The *index set* of an arbitrary class K of structures is the set

$$I(K) = \{i \in \omega : \mathcal{M}_i \in K\}$$

of all indices of computable structures from K. If the index set of a class K is hyperarithmetical, we say that the class K has a characterization. The idea is that index sets are a way to describe computable members of K, and so classes with hyperarithmetical index sets are nicely describable.

We are interested in complexity of isomorphisms between computable presentations of a countable structure. The main notion here is that of *computable categoricity* (or *autostability*). This notion has been part of computable model theory since Frohlich and Shepherdson first produced an example of two computable fields which were isomorphic but not computably isomorphic (see [1]). Mal'tsev in [2] studied the question of uniqueness of a constructive enumeration for a model and introduced the notion of a recursively stable model. Later in [3] he built isomorphic computable infinite-dimensional vector spaces that were not computably isomorphic. In the same paper he introduced the notion of an *autostable* model, which is equivalent to that of a computably categorical model. Since then, the definition of computable categoricity has been standardized and relativized to arbitrary Turing degrees $\mathbf{d}$, and has been the subject of much study (see, e.g., [4, 5]).

Definition 1. A computable structure $\mathcal{M}$ is $\mathbf{d}$-*computably categorical* (or $\mathbf{d}$-*autostable*) if, for every computable structure $\mathcal{A}$ isomorphic to $\mathcal{M}$, there exists a $\mathbf{d}$-computable isomorphism from $\mathcal{M}$ onto $\mathcal{A}$. In the case $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, we simply say that $\mathcal{M}$ is *computably categorical* (or *autostable*).

A computable structure $\mathcal{M}$ is *relatively computably categorical* if, for every its countable isomorphic copy $\mathcal{A}$, there exists an isomorphism computable in the atomic diagram of $\mathcal{A}$.

Downey, Kach, Lempp, Lewis, Montalbán, and Turetsky proved that there is no simple syntactic characterization of computable categoricity [6]. More formally, they showed that the index set of computable categorical structures is Π^1_1-complete. Combining the methods from [6, 7], Bazhenov, Goncharov, and Marchuk showed that the index set of computable structures of algorithmic dimension $n > 1$ is also Π^1_1-complete [8]. On the other hand, the index set of relatively computably categorical structures is Σ^0_3-complete [2].

More recently, Goncharov started to study the complexity of the notion of categoricity restricted to decidable structures [9-11].

Definition 2. A structure $\mathcal{A}$ is said to be *decidably categorical* (or *autostable relative to strong constructivizations*) if any two decidable copies of $\mathcal{A}$ are computably isomorphic.

TABLE 1

n-decidable $n \geq 2$	m-decidably categorical $m \leq n-2$	Π^1_1-complete	Corollary 1
n-decidable $n \geq 1$	$(n-1)$-decidably categorical	Π^0_4-complete	Corollary 2
n-decidable $n \geq 0$	m-decidably categorical $m \geq n$	Σ^0_3-complete	Proposition

Goncharov and Marchuk in [12] showed that the index set of computable, decidably categorical structures is $\Sigma^0_{\omega+2}$-complete, while for decidable, decidably categorical structures, the index set is a complete Σ^0_3 set. Index sets for decidably categorical structures with particular algebraic, model-theoretic, and algorithmic properties were further studied in [8, 13-15].

In this paper we consider n-decidable structures and their categoricity with respect to m-decidable copies, for $m \leq n \in \omega$.

Definition 3. We say that a structure $\mathcal{A}$ is *categorical relative to m-decidable presentations* (or *autostable relative to m-constructivizations*) if any two m-decidable copies of $\mathcal{A}$ are computably isomorphic.

In particular, being computably categorical is the same as being categorical relative to 0-decidable presentations.

We summarize the results of this paper in Table 1.

2. COMPLEXITY OF INDEX SETS

We first consider n-decidable structures that are categorical relative to n-decidable presentations.

THEOREM 1. The index set of n-decidable structures that are categorical relative to n-decidable presentations is Π^1_1-complete.

Proof. Recall that the index set of computably categorical structures is Π^1_1-complete [6]. This means that for every Π^1_1 set S, there is a uniformly computable sequence $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\omega}$ of structures such that $i \in S \iff \mathcal{A}_i$ is computably categorical.

Marker in [16] defined $\forall$- and $\exists$-extensions, $\mathcal{A}_\forall$ and $\mathcal{A}_\exists$, respectively, of an arbitrary structure $\mathcal{A}$. The main property is that the domain and the basic relations of $\mathcal{A}$ are definable in $\mathcal{A}_\forall, \mathcal{A}_\exists$ by universal or existential formulas, respectively. The extensions can be iteratively applied in the obvious way. Define B_i to be the result of applying Marker's $(\forall\exists)$-extension n times. It follows from [17] or [18] that if $\mathcal{A}_i$ is computable then B_i is n-decidable. And properties of the Marker's extensions proved in [19] imply that A_i is computably categorical iff B_i is categorical relative to n-decidable presentations. $\Box$

COROLLARY 1. For all $m \geq n \geq 0$, the index set of n-decidable structures that are categorical relative to m-decidable presentations is Π^1_1-complete.

We now consider 1-decidable, computably categorical structures, i.e., we do not impose additional effectiveness conditions on the copies of the structure except of being computable.

THEOREM 2. The index set of 1-decidable, computably categorical structures is Π^0_4-complete.

Proof. We first show that the index set is Π^0_4. Recall that $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i \in \omega}$ is a fixed effective listing of all partial computable structures.

The relation "$\mathcal{M}_i$ is n-decidable" is Σ^0_3, for it states that there is a partial computable $\{0, 1\}$-valued function f defined on pairs $(\phi(\overline{x}), \overline{a})$ with $\phi(\overline{x})$ a Σ_n formula in the language of $\mathcal{M}_i$ and $\overline{a} \in \mathcal{M}_i^{<\omega}$ a sequence of elements such that:

f is total;

if $\phi(\overline{x})$ is quantifier-free, then

$$f(\phi(\overline{x}), \overline{a}) = 1 \iff \mathcal{M}_i \models \phi(\overline{a});$$

if $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ is a Π_{n-1} formula, then

$$f(\exists \overline{y}\, \phi(\overline{x}, \overline{y}), \overline{a}) = 1 \iff \exists \overline{b}\, f(\neg \phi(\overline{x}, \overline{y}), \overline{a}\overline{b}) = 0.$$

Consider the following relations on pairs (i, j):

$$\begin{aligned} (i, j) \in E \iff & \mathcal{M}_i \text{ and } \mathcal{M}_j \text{ are total structures and there is a computable} \\ & \text{isomorphism between them,} \\ (i, j) \in F \iff & \mathcal{M}_i \text{ and } \mathcal{M}_j \text{ are total structures and there is a } \Delta^0_2 \text{ isomorphism} \\ & \text{between them.} \end{aligned}$$

It is straightforward to show that E is Σ^0_3, while F is Σ^0_4.

Now consider the following property of a computable structure $\mathcal{A}$:

$(*)$ for every computable structure $\mathcal{B}$, if there is a Δ^0_2 isomorphism from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$, then there is a computable isomorphism from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$.

As a relation on i, this can be expressed as

$$\forall j\, F(i, j) \to E(i, j),$$

and so it is Π^0_4.

Note that property $(*)$ is a weakening of computable categoricity. Downey, Kach, Lempp, and Turetsky showed that if a structure is computably categorical and 1-decidable, then it is relatively Δ^0_2-categorical [20]. Inspection of that proof reveals that use was not made of the full power of computable categoricity; instead, advantage was taken of property $(*)$ only. In fact, they showed the following:

LEMMA. If a structure is 1-decidable and has property $(*)$, then it is relatively Δ^0_2-categorical.

Note that a structure which is simultaneously relatively Δ^0_2-categorical and has property $(*)$ is necessarily computably categorical. Thus we have the following: a structure is 1-decidable and computably categorical if and only if it is 1-decidable and has property $(*)$. Therefore, the relation "$\mathcal{M}_i$ is 1-decidable and computably categorical" can be expressed as the conjunction of a Σ^0_3 formula and a Π^0_4 formula, and so it is Π^0_4.

To show the completeness at the level Π^0_4, we use a known method to code computable families of functions in 1-decidable unars (for short, S is coded in $\mathcal{M}_S$), as exposed in [21, 22]. The main feature of the construction is the following: S admits exactly one computable numbering up to equivalence iff the unar $\mathcal{M}_S$ is computably categorical. Thus the index set of computable families of functions with exactly one computable numbering is m-reducible to a required index set. And the first index set was investigated in [23], where its Π^0_4-completeness was proven. $\square$

Using the technique of Marker's extensions, it is not hard to infer the following:

COROLLARY 2. For any $n \geq 1$, the index set of n-decidable structures categorical relative to $(n-1)$-decidable presentations is Π^0_4-complete.

In [24], it was proved that a 2-decidable computably categorical structure is relatively computably categorical. In [20], it was stated that the index set of relatively computably categorical structures is Σ^0_3-complete. In fact, it was shown that the index set of 2-decidable computably categorical structures is Σ^0_3-complete. Applying the technique of Marker's extensions, we obtain

PROPOSITION. For any $n \geq 2$ and any $m \leq n-2$, the index set of n-decidable structures categorical relative to m-decidable presentations is Σ^0_3-complete.

REFERENCES

1. A. Fröhlich and J. Shepherdson, "Effective procedures in field theory," *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **248**, No. 950, 407-432 (1956).
2. A. I. Mal'tsev, "Constructive algebras. 1," *Usp. Mat. Nauk*, **16**, No. 3, 3-60 (1961).
3. A. I. Mal'tsev, "On recursive Abelian groups," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **146**, No. 5, 1009-1012 (1962).
4. S. S. Goncharov, "Autostable models and algorithmic dimensions," in *Handbook of Recursive Mathematics*, Vol. 1, *Recursive Model Theory*, Yu. L. Ershov et al. (eds.), *Stud. Log. Found. Math.*, **138**, Elsevier, Amsterdam (1998), pp. 261-287.
5. E. B. Fokina, V. Harizanov, and A. Melnikov, "Computable model theory," in *Turing's Legacy: Developments from Turing's Ideas in Logic, Lect. Notes Log.*, **42**, R. Downey (ed.), Cambridge Univ. Press, Ass. Symb. Log., Cambridge (2014), pp. 124-194.
6. R. G. Downey, A. M. Kach, S. Lempp, A. E. M. Lewis-Pye, A. Montalbán, and D. D. Turetsky, "The complexity of computable categoricity," *Adv. Math.*, **268**, 423-466 (2015).
7. S. S. Goncharov, "Problem of number of nonautoequivalent constructivizations," *Algebra and Logic*, **19**, No. 6, 401-414 (1980).

8. S. S. Goncharov, N. A Bazhenov, and M. I. Marchuk, “The index set of Boolean algebras autostable relative to strong constructivizations,” *Sib. Math. J.*, **56**, No. 3, 394-404 (2015).
9. S. S. Goncharov, “Degrees of autostability relative to strong constructivizations,” *Trudy MIAN*, **274**, 119-129 (2011).
10. S. S. Goncharov, “On the autostability of almost prime models with respect to strong constructivizations,” *Usp. Mat. Nauk*, **65**, No. 5(395), 107-142 (2010).
11. S. S. Goncharov, “Autostability of prime models with respect to strong constructivizations,” *Algebra and Logic*, **48**, No. 6, 410-417 (2009).
12. S. S. Goncharov and M. I. Marchuk, “Index sets of constructive models that are autostable under strong constructivizations,” *Vestnik NGU, Mat., Mekh., Inf.*, **13**, No. 4, 43-67 (2013).
13. S. S. Goncharov, “Index sets of almost prime constructive models,” *Vestnik NGU, Mat., Mekh., Inf.*, **13**, No. 3, 38-52 (2013).
14. S. S. Goncharov and M. I. Marchuk, “Index sets of constructive models of bounded signature that are autostable relative to strong constructivizations,” *Algebra and Logic*, **54**, No. 2, 108-126 (2015).
15. S. S. Goncharov and M. I. Marchuk, “Index sets of constructive models of nontrivial signature autostable relative to strong constructivizations,” *Dokl. AN*, **461**, No. 2, 140-142 (2015).
16. D. Marker, “Non Σ_n axiomatizable almost strongly minimal theories,” *J. Symb. Log.*, **54**, No. 3, 921-927 (1989).
17. U. Andrews and J. S. Miller, “Spectra of theories and structures,” *Proc. Am. Math. Soc.*, **143**, No. 3, 1283-1298 (2015).
18. S. S. Goncharov and B. Khoussainov, “Complexity of theories of computable categorical models,” *Algebra and Logic*, **43**, No. 6, 365-373 (2004).
19. E. B. Fokina, I. Kalimullin, and R. Miller, “Degrees of categoricity of computable structures,” *Arch. Math. Log,*, **49**, No. 1, 51-67 (2010).
20. R. G. Downey, A. M. Kach, S. Lempp, and D. D. Turetsky, “Computable categoricity versus relative computable categoricity,” *Fund. Math.*, **221**, No. 2, 129-159 (2013).
21. S. S. Goncharov and Yu. L. Ershov, *Constructive Models, Sib. School Alg. Log.* [in Russian], Nauch. Kniga, Novosibirsk (1999).
22. O. Kudinov, “An autostable 1-decidable model without a computable Scott family of $\exists$-formulas,” *Algebra and Logic* **35**, No. 4, 255-260 (1996).
23. M. Kummer, S. Wehner, and X. Yi, “Discrete families of recursive functions and index sets,” *Algebra and Logic*, **33**, No. 2, 85-94 (1994).
24. S. S. Goncharov, “Autostability and computable families of constructivizations,” *Algebra and Logic*, **14**, No. 6, 392-409 (1975).