

ОБ АВТОМОРФНЫХ КОРТЕЖАХ ЭЛЕМЕНТОВ В ВЫЧИСЛИМЫХ МОДЕЛЯХ

С. С. Гончаров, В. С. Харизанов,
Ю. Ф. Найт, А. С. Морозов, А. В. Ромина

Аннотация. Получен критерий существования двух изоморфных, но не гиперарифметически изоморфных кортежей в гиперарифметической модели. Этот критерий использован для доказательства того, что такая ситуация встречается в моделях из некоторых хорошо известных классов.

Ключевые слова: модель, вычислимость, вычислимая модель, гиперарифметическая модель, автоморфизм, рекурсивный автоморфизм, допустимые множества, рекурсивная модель, конструктивная модель, ранг Скотта, кванторный ранг, автоморфные кортежи.

1. Введение

Мы предполагаем, что читатель знаком с допустимыми множествами (см. [1]) и вычислимыми моделями (см., например, [2] или [3]).

Пусть \mathcal{M} — модель, основное множество которой является подмножеством ω . Будем говорить, что два кортежа $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ *автоморфны* (*гиперарифметически автоморфны*), и обозначать этот факт $\bar{a} \cong \bar{b}$ ($\bar{a} \cong_h \bar{b}$), если существует (гиперарифметический) автоморфизм f модели \mathcal{M} , поэлементно отображающий \bar{a} в \bar{b} . Поскольку во всех случаях будет ясно, какая модель \mathcal{M} имеется в виду, она не будет упоминаться в обозначениях.

Существует пример вычислимой модели \mathcal{M} и ее элементов a и b таких, что для некоторого $f \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ выполнено $f(a) = b$, но это свойство не выполняется ни для какого гиперарифметического автоморфизма [4] (это также следует из [5]). В этой работе мы изучаем данное явление и связанные с ним эффекты в общем случае и покажем, что такая ситуация встречается довольно часто. Фактически мы докажем критерий существования таких пар. Как следствие получим серию примеров автоморфных, но не гиперарифметически автоморфных кортежей в моделях из хорошо известных классов.

Мы обозначаем через НУР_ω модель $\text{НУР}_{\langle\omega, <\rangle}$, являющуюся наименьшим допустимым множеством над $\langle\omega, <\rangle$, содержащим ее основное множество ω в качестве элемента.

Нам понадобятся следующие результаты.

Первые четыре автора поддержаны бинациональным грантом NSF DMS-0075899, первый и четвертый авторы частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00953) и программой «Ведущие научные школы» (грант НШ-2112.03.1).

Теорема 1.1 (теорема компактности Барвайса [1, теорема III 5.6]). Пусть $L_{\mathbb{A}}$ — счетный допустимый фрагмент языка $L_{\infty, \omega}$ и T — множество предложений языка $L_{\mathbb{A}}$, являющееся Σ_1 -подмножеством \mathbb{A} . Если каждое $T_0 \subseteq T$, являющееся элементом \mathbb{A} , имеет модель, то и T имеет модель.

Теорема 1.2. Пусть $\mathfrak{M} \in \text{HYP}_{\omega}$, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^n$ и $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b})$ для всех $\varphi(\bar{x}) \in \text{HYP}_{\omega}$. Тогда $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \cong \langle \mathfrak{M}, \bar{b} \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственное следствие теорем VII 7.3, VII 5.2, VII 5.3 из [1]. \square

Теорема 1.3 [1, теоремы IV 3.1 и IV 3.7]. Пусть \mathfrak{M} — счетная модель и S — отношение на \mathfrak{M} . Тогда S является Π_1^1 -отношением на \mathfrak{M} тогда и только тогда, когда S — Σ -отношение на $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$.

Заметим, что если \mathfrak{M} — вычислимая модель, то $\mathfrak{M} \in \text{HYP}_{\omega}$. В этом случае мы можем рассматривать \mathfrak{M} как модель, основное множество которой является начальным сегментом ординала $\omega \in \text{HYP}_{\omega}$.

Заметим, что произвольное Σ -подмножество ординала $\omega \in \text{HYP}_{\omega}$ будет Π_1^1 -подмножеством ω . Это следует из теоремы 1.3 и существования биекции $f \in \text{HYP}_{\omega}$ из множества ω , рассматриваемого как модель, образующую «дно» структуры HYP_{ω} , на множество $\omega \in \text{HYP}_{\omega}$.

Напомним определение *кванторного ранга* бесконечной формулы [1] (мы предполагаем, что импликация \Rightarrow выражена через \neg и \wedge и, таким образом, не встречается в наших формулах):

$$\text{qr}(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi \text{ бескванторная;} \\ \text{qr}(\psi), & \text{если } \varphi \text{ имеет вид } \neg\psi; \\ \text{qr}(\psi) + 1, & \text{если } \varphi \text{ имеет вид } \exists v\psi \text{ или } \forall v\psi; \\ \sup\{\text{qr}(\psi) \mid \psi \in \Phi\}, & \text{если } \varphi \text{ имеет вид } \bigwedge \Phi \text{ или } \bigvee \Phi. \end{cases}$$

Пусть α — ординал. Модели \mathfrak{M} и \mathfrak{N} называются *эквивалентными* (α -эквивалентными), если они удовлетворяют одним и тем же предложениям (кванторного ранга не более α). Обозначаем этот факт так: $\mathfrak{M} \equiv^{\alpha} \mathfrak{N}$. Два кортежа $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ называются *эквивалентными* (α -эквивалентными), если они удовлетворяют одним и тем же предложениям (кванторного ранга не более α). Этот факт будет обозначаться так: $\bar{a} \equiv \bar{b}$ ($\bar{a} \equiv^{\alpha} \bar{b}$). Будем говорить, что $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ имеет *кванторный ранг* α в модели \mathfrak{M} , если для всех $\bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ выполнена импликация ($\bar{a} \equiv^{\alpha} \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \equiv \bar{b}$) и α — наименьший ординал с таким свойством. Он обозначается через $\text{qr}(\bar{a})$. *Рангом Барвайса* $\text{br}(\mathfrak{M})$ модели \mathfrak{M} назовем наименьший ординал α такой, что для всех $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ выполнено ($\bar{a} \equiv^{\alpha} \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \equiv^{\alpha+1} \bar{b}$). Это в точности то же самое, что и ранг Скотта в [1]. Хорошо известно, что ранг Барвайса модели $\mathfrak{M} \in \text{HYP}_{\omega}$ не превосходит ω_1^{CK} [1].

Нам также понадобится существование серии формул $\sigma_{\mathfrak{M}, \bar{a}}^{\alpha}(\bar{x}) \in \text{HYP}_{\omega}$, где \mathfrak{M} — модель, α — ординал и $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$, обладающих следующими свойствами:

- 1) формулы $\sigma_{\mathfrak{M}, \bar{a}}^{\alpha}$ определяются с помощью Σ -функции на HYP_{ω} от $\alpha < \omega_1^{\text{CK}}$, $\mathfrak{M} \in \text{HYP}_{\omega}$ и $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$;
- 2) для всех $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ соотношение $\mathfrak{M} \models \sigma_{\mathfrak{M}, \bar{a}}^{\alpha}(\bar{b})$ выполнено тогда и только тогда, когда $\bar{a} \equiv^{\alpha} \bar{b}$;
- 3) $\text{qr} \sigma_{\mathfrak{M}, \bar{a}}^{\alpha} = \alpha$.

Мы опускаем в обозначениях \mathfrak{M} и пишем просто $\sigma_{\bar{a}}^{\alpha}$, поскольку всякий раз будет ясно, какая модель \mathfrak{M} имеется в виду.

Общие результаты об использовании ординалов для анализа структур см. также в [6].

2. Общий результат

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{M} — гиперарифметическая модель. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) существуют кортежи $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ такие, что $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \cong \langle \mathfrak{M}, \bar{b} \rangle$, но $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \not\cong_h \langle \mathfrak{M}, \bar{b} \rangle$;
- 2) существует кортеж $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$, для которого существует бесконечное семейство $(\bar{a}_i)_{i < \omega}$ кортежей из $\mathfrak{M}^{<\omega}$, удовлетворяющих свойствам:
 - (а) $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \cong \langle \mathfrak{M}, \bar{a}_i \rangle$ для всех $i < \omega$,
 - (б) $\langle \mathfrak{M}, \bar{a}_i \rangle \not\cong_h \langle \mathfrak{M}, \bar{a}_j \rangle$ для всех $i < j < \omega$;
- 3) ранг Барвайса \mathfrak{M} равен $\omega_1^{\text{СК}}$;
- 4) $I_{\mathfrak{M}} \notin \Pi_1^1$, где $I_{\mathfrak{M}} = \{ \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in \mathfrak{M}^{<\omega} \times \mathfrak{M}^{<\omega} \mid \bar{a} \cong \bar{b} \}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $2 \Rightarrow 1$ очевидна.

$1 \Rightarrow 4$. Для получения противоречия предположим, что $I_{\mathfrak{M}} \in \Pi_1^1$. Тогда $I_{\mathfrak{M}}$ принадлежит Δ_1^1 , поскольку $I_{\mathfrak{M}}$ всегда лежит в Σ_1^1 . Используя обычную членочную конструкцию с $I_{\mathfrak{M}}$ в качестве оракула, мы можем легко построить гиперарифметический автоморфизм, отображающий \bar{a} в \bar{b} , что является противоречием. Начнем с конечного автоморфизма $f_0 = f$, поэлементно отображающего \bar{a} в \bar{b} . На каждом шаге мы, используя оракул $I_{\mathfrak{M}}$, расширяем текущие значения кортежей, добавляя конечные семейства элементов в область определения и в область значений для текущего значения f . Делаем это так, чтобы сохранить принадлежность пары этих новых кортежей множеству $I_{\mathfrak{M}}$. На каждом шаге мы добавляем в область определения f наименьшее натуральное число, еще ей не принадлежащее. Затем проделываем то же самое для области значений f .

$4 \Rightarrow 3$. Предположим, что $I_{\mathfrak{M}} \notin \Pi_1^1$, но ранг Барвайса модели \mathfrak{M} меньше, чем $\omega_1^{\text{СК}}$. Обозначим его через α . В этом случае по определению ранга Барвайса следующие условия эквивалентны:

- 1) $\bar{a} \cong \bar{b}$;
- 2) $\mathfrak{M} \models \sigma_{\mathfrak{M}, \bar{a}}^\alpha[\bar{b}]$.

Поэтому $I_{\mathfrak{M}}$ принадлежит Δ_1^1 , что противоречит сделанному раньше предположению.

$3 \Rightarrow 2$. Предположим для получения противоречия, что для каждого кортежа $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ число типов гиперарифметического изоморфизма внутри его орбиты относительно автоморфизмов конечно, а именно

$$\forall \bar{a}_1 \in \mathfrak{M}^{<\omega} \exists t \in \omega \forall \bar{a}_2 \dots \bar{a}_t \left(\bigwedge_{i=2}^t \bar{a}_1 \cong \bar{a}_i \Rightarrow \bigvee_{1 \leq i < j \leq t} \bar{a}_i \cong_h \bar{a}_j \right).$$

Это можно переписать так:

$$\forall \bar{a}_1 \in \mathfrak{M}^{<\omega} \exists t \in \omega \forall \bar{a}_2 \dots \bar{a}_t \exists \beta \left(\bigvee_{i=2}^t \bar{a}_1 \not\cong^\beta \bar{a}_i \vee \bigvee_{1 \leq i < j \leq t} \bar{a}_i \cong_h \bar{a}_j \right).$$

(Здесь мы используем естественные сокращения типа

$$\bigvee_{i=2}^t \bar{a}_1 \not\cong^\beta \bar{a}_i \quad \text{для } \exists i \leq t (i \geq 2 \ \& \ \bar{a}_1 \not\cong^\beta \bar{a}_i),$$

$\forall \bar{a}_2 \dots \bar{a}_t (\dots)$ для $\forall m ((m \text{ кодирует } \langle \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_t \rangle) \Rightarrow (\dots))$ и т. д.)

Двойное применение Σ -выборки дает нам существование $\alpha < \omega_1^{\text{СК}}$ такого, что

$$\forall \bar{a}_1 \in \mathfrak{M}^{<\omega} \exists t \in \omega \forall \bar{a}_2 \dots \bar{a}_t \left(\bigwedge_{i=2}^t \bar{a}_1 \equiv^\alpha \bar{a}_i \Rightarrow \bigvee_{1 \leq i < j \leq t} \bar{a}_i \cong_h \bar{a}_j \right). \quad (1)$$

Покажем, что ранг Барвайса модели \mathfrak{M} не превосходит $\alpha + \omega$, что будет противоречить исходному предположению. Фактически мы докажем, что если некоторые кортежи $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ удовлетворяют $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$, то $\bar{a} \cong \bar{b}$. Для доказательства достаточно проверить, что если $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$, то тогда для каждого c найдется d такой, что $\bar{a}c \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}d$, и утверждение будет следовать из челночной конструкции.

Предположим, что $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$. Возьмем произвольный элемент c . Тогда утверждение $\sigma_{ac}^\alpha(\bar{x}, y)$ выполнено на кортеже $\bar{a}c$ в \mathfrak{M} . Следовательно, $\mathfrak{M} \models \exists y \sigma_{ac}^\alpha(\bar{a}, y)$. Из $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$ вытекает, что $\mathfrak{M} \models \exists y \sigma_{ac}^\alpha(\bar{b}, y)$. Отсюда мы получим, что множество

$$D = \{p \mid \mathfrak{M} \models \sigma_{ac}^\alpha(\bar{b}, p)\}$$

непусто. Очевидно, что каждый элемент $p \in D$ удовлетворяет $\bar{a}c \equiv^\alpha \bar{b}p$.

Заметим, что подмножества из D , определяемые формулами кванторного ранга менее, чем $\alpha + \omega$, с параметрами \bar{b} образуют конечную булеву алгебру. В противном случае существовало бы бесконечно много попарно α -эквивалентных неавтоморфных кортежей вида $\bar{b}p$, где $p \in D$, что противоречит (1). Пусть формулы $\varphi_1(\bar{b}, y), \dots, \varphi_k(\bar{b}, y)$ кванторного ранга менее, чем $\alpha + \omega$, определяют атомы вышеупомянутой булевой алгебры. Если ни для одного $i \in \{1, \dots, k\}$ элемент c не удовлетворяет $\varphi_i(\bar{a}, y)$, то

$$\mathfrak{M} \models \exists y \left(\bigwedge_{i=1, \dots, k} \neg \varphi_i(\bar{a}, y) \ \& \ \sigma_{ac}^\alpha(\bar{a}, y) \right),$$

но это утверждение становится ложным, если мы заменим \bar{a} на \bar{b} ; это, в свою очередь, противоречит $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$. Выберем i так, чтобы выполнялось $\mathfrak{M} \models \varphi_i(\bar{a}, c)$. Выберем теперь d как произвольный элемент из D , удовлетворяющий формуле $\varphi_i(\bar{b}, x)$ в модели \mathfrak{M} , и проверим истинность эквивалентности $\bar{a}c \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}d$. Предположим, что она ложна, и пусть $\psi(\bar{x}, y)$ — формула кванторного ранга менее $\alpha + \omega$, различающая эти кортежи, т. е. $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{a}, c)$, но $\mathfrak{M} \models \neg \psi(\bar{b}, d)$. Теперь в силу того, что формулы $\varphi_i(\bar{b}, y)$, $1 \leq i \leq k$, определяют атомы, имеем

$$\mathfrak{M} \models \forall y (\sigma_{ac}^\alpha(\bar{b}, y) \ \& \ \varphi_i(\bar{b}, y) \Rightarrow \neg \psi(\bar{b}, y)),$$

но

$$\mathfrak{M} \models \exists y (\sigma_{ac}^\alpha(\bar{a}, y) \ \& \ \varphi_i(\bar{a}, y) \ \& \ \psi(\bar{a}, y));$$

это противоречит эквивалентности $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$. \square

Теорема 2.2. Пусть \mathfrak{M} — гиперарифметическая модель и $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{M}^{<\omega}$. Тогда $\text{qr}(\bar{a}) = \omega_1^{\text{СК}}$ тогда и только тогда, когда $I_{\bar{a}} \notin \Pi_1^1$, где $I_{\bar{a}} =_{\text{def}} \{b \in \mathfrak{M}^{<\omega} \mid \bar{a} \cong \bar{b}\}$.

Доказательство. (\Rightarrow) Предположим для получения противоречия, что $I_{\bar{a}} \in \Pi_1^1$.

Мы используем теорему компактности Барвайса. Пусть L — язык модели \mathfrak{M} . Распируем L до языка L' путем добавления новой константы 0, интерпретируемой как нуль, констант $\bar{c} = c_0, \dots, c_k$ и нового унарного функционального символа s , интерпретируемого как прибавление единицы. Теперь построим Σ -семейство T предложений фрагмента $L^* = L'_{\omega_1\omega} \cap \text{НУР}_\omega$, описывающего некоторое обогащение \mathfrak{M} , утверждающее, что в \mathfrak{M} справедливо $\bar{c} \cong \bar{a}$ и в то же время $\bar{c} \notin I_{\bar{a}}$. Покажем, что каждая часть множества T , принадлежащая НУР_ω , имеет модель. Очевидно, что семейство T не может быть совместным. Тем не менее по теореме компактности Барвайса семейство T имеет модель и является, таким образом, совместным; противоречие.

Пусть $T = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$, где

- S_0 — это множество $\{\forall x \bigvee_{m \in \omega} (x = s^m(0))\}$ (каждый элемент из \mathfrak{M} — натуральное число);

- S_1 — это диаграмма модели \mathfrak{M} в языке $L \cup \{s, 0\}$, т. е. семейство

$$\{\varphi(s^{m_1}(0), \dots, s^{m_l}(0)) \mid l, m_1, \dots, m_l \in \omega, \varphi(x_1, \dots, x_l) —$$

бескванторная формула языка L такая, что $\mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_l)\}$;

- $S_2 = \{\neg \bigvee_{i=1, \dots, k} (c_i = s^{b_i}(0)) \mid \bar{b} = b_1, \dots, b_k \in I_{\bar{a}}\}$ (\bar{c} не равно никакому кортежу $\bar{b} \in I_{\bar{a}}$); это Σ -семейство на НУР_ω при предположении, что $I_{\bar{a}} \in \Pi_1^1$;

- $S_3 = \{\varphi(\bar{c}) \mid \varphi(\bar{x}) \in L^* \ \& \ \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})\}$ (\bar{c} и \bar{a} удовлетворяют тем же самым формулам L^* , следовательно, по теореме 1.2 они изоморфны в \mathfrak{M}).

Проверим, что каждая часть T , принадлежащая НУР_ω , имеет модель. В самом деле, каждое $S \subseteq S_3$ такое, что $S \in \text{НУР}_\omega$, удовлетворяет условию

$$A_S = \left\{ \bar{d} \mid \mathfrak{M} \models \bigwedge_{\varphi(\bar{c}) \in S} \varphi(\bar{d}) \right\} \setminus I_{\bar{a}} \neq \emptyset.$$

В противном случае множество $I_{\bar{a}}$ можно определить формулой фрагмента L^* ; следовательно, мы получили бы $\text{qr}(\bar{a}) < \omega_1^{\text{СК}}$. Любой кортеж элементов из множества A_S можно взять в качестве интерпретации \bar{c} . Модель \mathfrak{M} с такой интерпретацией для \bar{c} и очевидными интерпретациями для s и 0 является моделью семейства $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S$.

По теореме компактности Барвайса T имеет модель. Поскольку эта модель удовлетворяет S_0 и S_1 , ее обеднение до языка L изоморфно \mathfrak{M} . (Если мы отождествим $s^p(0)$ с p для всех $p < \omega$, она фактически совпадет с \mathfrak{M} .) Семейства S_2 и S_3 утверждают, что $\bar{c} \notin I_{\bar{a}}$, но $\bar{c} \cong \bar{a}$. Получили противоречие.

(\Leftarrow) Если $\text{qr}(\bar{a}) < \omega_1^{\text{СК}}$, то $\forall \bar{b} \in \mathfrak{M}^k (\bar{a} \cong \bar{b} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \sigma_{\mathfrak{M}, \bar{a}}^{\text{qr}(\bar{a})}[\bar{b}])$. Отсюда следует, что $I_{\bar{a}}$ — Δ -подмножество НУР_ω , т. е. $I_{\bar{a}} \in \Pi_1^1$, что ведет к противоречию. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Может случиться, что два автоморфных кортежа кванторного ранга менее, чем $\omega_1^{\text{СК}}$, не могут быть отождествлены посредством гиперарифметического автоморфизма. Приведем простой пример. Возьмем две изоморфные не гиперарифметически изоморфные вычислимые модели \mathfrak{M}_0 и \mathfrak{M} , с основными множествами, равными ω в языке L , содержащем только предикатные символы. Например, мы можем взять модели вида $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ и $\langle \mathfrak{M}, \bar{b} \rangle$, где \bar{a} и \bar{b} автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны в \mathfrak{M} , и превратим их в модели предикатной сигнатуры. Существование таких моделей показано

выше. Рассмотрим новую модель \mathfrak{M}^* , являющуюся прямым объединением моделей \mathfrak{M}_0 и \mathfrak{M}_1 , с добавленными двумя новыми элементами a_0 и a_1 и новым предикатным символом P таким, что

$$P(x, y) \Leftrightarrow ((x = a_0) \& (y \in \mathfrak{M}_0)) \vee ((x = a_1) \& (y \in \mathfrak{M}_1)).$$

Определим вычислимую модель \mathfrak{M} , структура которой перенесена на ω посредством отображения

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & \text{если } x = 0, \\ a_1, & \text{если } x = 1, \\ t \in \mathfrak{M}_0, & \text{если } x = 2t + 2, \\ t \in \mathfrak{M}_1, & \text{если } x = 2t + 3. \end{cases}$$

Легко убедиться, что $f^{-1}(a_0)$ и $f^{-1}(a_1)$ автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны в \mathfrak{M} и что множество $\{f^{-1}(a_0), f^{-1}(a_1)\}$ определимо формулой $\exists y P(x, y)$, откуда следует, что кванторный ранг $f^{-1}(a_0)$ и $f^{-1}(a_1)$ конечен.

Теорема 2.3. Пусть φ — предложение из $L_{\text{НУР}, \omega}$. Пусть $m < \omega$ и A — гиперарифметическое подмножество ω такое, что для каждого конструктивного ординала α существуют A -вычислимая модель $\mathfrak{A} \models \varphi$ и кортежи $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{A}^m$ такие, что $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \cong \langle \mathfrak{A}, \bar{b} \rangle$, но не существует автоморфизма модели \mathfrak{A} , вычислимого в $\mathbf{0}^{(\alpha)}$, поэлементно отображающего \bar{a} в \bar{b} . Тогда существуют A -вычислимая модель $\mathfrak{B} \models \varphi$ и $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{B}^m$ такие, что $\langle \mathfrak{B}, \bar{a} \rangle \cong \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$, но $\langle \mathfrak{B}, \bar{a} \rangle \not\cong_h \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дадим только набросок доказательства. Результат будет следовать из теоремы компактности Барвайса. Чтобы применить эту теорему, определим Σ -семейство предложений из $L_{\text{НУР}, \omega}$, которое утверждает, что

- 1) $n < \omega$ кодирует некоторую A -вычислимую модель для φ ;
- 2) для всех гиперарифметических перестановок f на ω неверно, что f — автоморфизм этой модели, который поэлементно отображает \bar{a} в \bar{b} .

По теореме компактности Барвайса существует натуральное число $n < \omega$, кодирующее A -вычислимую модель для φ с требуемым свойством. \square

3. Применения к конкретным классам моделей

Линейные порядки. Хорошо известно (см. [2, 5, 7]), что существует вычислимый линейный порядок типа $\omega_1^{\text{СК}} + (\omega_1^{\text{СК}} \times \eta)$, где η — упорядочение по типу рациональных чисел такое, что любые два его различных автоморфных элемента из второго слагаемого не гиперарифметически автоморфны. Отсюда мы можем заключить, что ранг Барвайса этого порядка равен $\omega_1^{\text{СК}}$.

p -Группы. Применим теорему 2.1 для доказательства существования вычислимой p -группы и двух автоморфных, но не гиперарифметически автоморфных кортежей в ней. Для этого достаточно построить вычислимую p -группу ранга Барвайса $\omega_1^{\text{СК}}$. Однако в этом случае мы не будем знать длину этих кортежей. Мы дадим прямое доказательство существования такой группы и кортежей длины 1. Отсюда будет следовать и существование p -группы ранга Барвайса $\omega_1^{\text{СК}}$.

Теорема 3.1. Для каждого простого p существуют вычислимая p -группа и ее элементы a, b , которые автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого конструктивного ординала α построим вычислимую p -группу и ее элементы a и b , которые автоморфны, но тьюрингова степень каждого автоморфизма, переводящего a в b , больше либо равна

$0^{(\alpha)}$. Теорема будет следовать из теоремы 2.3. Сначала напомним некоторые определения. О представлении p -групп деревьями см., например, [8].

Деревом называется любое подмножество $T \subseteq \omega^{<\omega}$, содержащее пустую последовательность \emptyset и замкнутое относительно начальных сегментов, т. е. всякий раз если $u \in T$ и v — начальный сегмент u , то $v \in T$. Мы будем считать, что дерево «растет вниз»; например, последовательность $\langle 1, 2, 3 \rangle$ находится ниже, чем $\langle 1, 2 \rangle$. Любой элемент $s \in \omega^{<\omega}$, кроме \emptyset , имеет своего *предшественника*, который получается вычеркиванием последнего символа последовательности s ; например, предшественником для $\langle 0, 1 \rangle$ является $\langle 0 \rangle$. Последовательность $u = (u_i)_{i < \omega}$ элементов дерева T называется *бесконечной ветвью* T , если $u_0 = \emptyset$ и каждый ее элемент u_i является предшественником u_{i+1} . Мы используем обозначение $u \upharpoonright i = u_i$. *Производной* дерева T назовем множество

$$T' = \{s \in T \mid s \text{ — предшественник некоторого элемента из } T\} \cup \{\emptyset\}.$$

Для произвольного ординала α определим по индукции α -ю *производную* $T^{(\alpha)}$ дерева T следующим образом:

$$\begin{aligned} T^{(0)} &= T; \\ T^{(\alpha+1)} &= (T^{(\alpha)})'; \\ T^{(\gamma)} &= \bigcap_{\beta < \gamma} T^{(\beta)}, \text{ если } \gamma \text{ предельный.} \end{aligned}$$

Уровнем элемента $a \in T$ назовем число элементов в кортеже a . Каждый фундированный элемент $a \in T$ имеет *ординальный ранг* $rk(a)$, определяемый таким образом:

$$rk(a) = \sup\{rk(b) + 1 \mid a \text{ — предшественник для } b\}.$$

Легко видеть, что $rk(a) = \min\{\alpha \mid a \in T^{(\alpha)} \setminus T^{(\alpha+1)}\}$.

Зафиксируем простое число p . С каждым деревом T ассоциируем p -группу $G[T]$: группа $G[T]$ определена множеством порождающих T и следующим множеством определяющих соотношений:

$$\{pa = b \mid a, b \in T \ \& \ b \text{ — предшественник } a\}.$$

Элементы группы $G[T]$ обозначаются формальными выражениями вида $\sum_{i=1}^k c_i a_i$, где $a_i \in T$, $c_i \in \mathbb{Z}$. Теперь мы опишем канонические представления элементов из $G[T]$. Рассмотрим следующие три типа редукций.

- I. $ma \rightarrow ra + qb$, где b — предшественник a и $m \neq 0$, $m = pq + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < p$.
- II. $\emptyset + a \rightarrow a$.
- III. $0a \rightarrow \emptyset$.

Применение каждой из этих редукций к выражению вида $\sum_{i=1}^k c_i a_i$ состоит в замене подвыражения в левой части редукции выражением, стоящим в правой ее части, с последующим приведением подобных членов для получения формального выражения того же самого типа. При этом порядок следования слагаемых для нас не важен. Можно проверить, что эти редукции удовлетворяют свойствам:

- 1) результат применения редукции обозначает тот же элемент, что и первоначальное выражение;

- 2) для каждого выражения S невозможна бесконечная цепочка выражений $S = S_0, S_1, S_2, \dots$ такая, что каждый элемент S_{i+1} получается из S_i редукцией типа I, II или III, при этом $S_i \neq S_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$;
- 3) если формальное выражение S приводится конечными сериями редукций к формальным выражениям S' и S'' , то S' и S'' приводятся конечными сериями редукций к некоторому одному и тому же формальному выражению S''' .

Из этого следует, что каждая последовательность редукций в конце концов остановится в состоянии, когда дальнейшие редукции уже невозможны, при этом результат не зависит от порядка следования редукций. Нередуцируемые выражения называются *каноническими формами*. Мы можем рассматривать группу $G[T]$ как множество канонических форм, на которых сложение $+$ естественно определено как взятие формальной суммы выражений с последующим вычислением канонической формы полученного выражения.

Для каждого α определим подгруппу $p^\alpha G \leq G$ обычным образом:

$$\begin{aligned} p^0 G &= G; \\ p^{\alpha+1} G &= \{x \in p^\alpha G \mid \exists y \in p^\alpha G (x = py)\}; \\ p^\gamma &= \bigcap_{\beta < \gamma} p^\beta G, \text{ если } \gamma \text{ — предельный ординал.} \end{aligned}$$

Лемма 3.2. Пусть T — дерево. Тогда группа $p^\alpha G[T]$ совпадает с подгруппой в $G[T]$, порожденной всеми элементами из $T^{(\alpha)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по α . \square

Зафиксируем конструктивный ординал α и рассмотрим вычислимое дерево T_0 , имеющее единственную бесконечную ветвь u , тьюрингова степень которой равна $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Такие деревья существуют (см. [9]). Определим дерево T_1 как $\{\emptyset, \langle 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 0 \rangle, \dots\}$. Это дерево состоит из единственной бесконечной ветви. Определим вычислимое дерево T как

$$T = \{\emptyset\} \cup \{1s \mid s \in T_0\} \cup \{2s \mid s \in T_1\}.$$

Заметим, что это дерево имеет в точности две бесконечные ветви:

$$s_0^* = \{\emptyset\} \cup \{1(u \upharpoonright i) \mid i \in \omega\}, \quad s_1^* = \{\emptyset\} \cup \{2s \mid s \in T_1\}.$$

Покажем, что элементы $a = \langle 1 \rangle$ и $b = \langle 2 \rangle$ группы $G[T]$ автоморфны. Заметим, что существует ординал β такой, что $T^{(\beta+1)} = T^{(\beta)}$. Вдобавок $T^{(\beta)} = s_0^* \cup s_1^*$ и $G[T^{(\beta)}] = G[s_0^*] \oplus G[s_1^*]$. Более того, $G[T^{(\beta)}]$ — делимая подгруппа в $G[T]$. Поскольку каждая делимая подгруппа выделяется прямым слагаемым в любой группе (см. [10, теорема 21.2]), $G[T]$ имеет разложение

$$G[T] = G[s_0^*] \oplus G[s_1^*] \oplus H \tag{2}$$

для некоторой подгруппы $H \leq G[T]$.

Легко видеть, что a и b автоморфны в сумме $G[s_0^*] \oplus G[s_1^*]$. Согласно разложению (2) они автоморфны и в группе $G[T]$.

Любой автоморфизм f группы $G[T]$, переводящий a в b , имеет тьюрингову степень, большую либо равную $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Напомним, что бесконечная ветвь s_1^* состоит из элементов $\emptyset, \langle 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 0, 0 \rangle, \langle 2, 0, 0, 0 \rangle, \dots$. Заметим, что поскольку $p \cdot \langle 2, 0 \rangle = \langle 2 \rangle$, каноническая форма $f^{-1}(\langle 2, 0 \rangle)$ содержит элемент из s_0^* уровня 2. Из тех же соображений получаем, что каноническая форма $f^{-1}(\langle 2, 0, 0 \rangle)$

содержит элемент из s_0^* уровня 3, и т. д. Таким образом, следующий алгоритм вычисляет s_0^* относительно f : чтобы вычислить элемент $s_0^* \upharpoonright m$, нужно взять произвольный элемент канонического представления для $f^{-1}(\langle 2, 0^m \rangle)$, находящийся под $s_0^* \upharpoonright (m - 1)$.

Теперь остается применить теорему 2.3. \square

Следствие 1. *Существует p -группа ранга Барвайса $\omega_1^{\text{СК}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. теорему 2.1. \square

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ. Здесь мы докажем существование булевых алгебр ранга Барвайса $\omega_1^{\text{СК}}$. Затем докажем, что число элементов в гиперарифметически неавтоморфных кортежах может быть выбрано равным 1.

В [11] П. Е. Алаев доказал результат, из которого следует, что если \mathfrak{B} — α -атомная булева алгебра, то ее ранг Барвайса больше либо равен α . Несмотря на то, что приведенная оценка довольно грубая, для наших целей этого вполне достаточно. С другой стороны, в [12] С. С. Гончаров доказывает, что для каждого конструктивного ординала $\alpha < \omega_1^{\text{СК}}$ существует α -атомная вычислимая булева алгебра.

Используя эти результаты, мы можем построить Σ -множество T $L_{\text{НУР}_\omega}$ -формул, утверждающих, что натуральное число m является кодом вычислимой булевой алгебры, ранг Барвайса которой не менее $\omega_1^{\text{СК}}$.

Сначала заметим, что существует Σ -функция $\alpha \mapsto \Phi_\alpha(x)$ на НУР_ω , которая по ординалу $\alpha < \omega_1^{\text{СК}}$ выдает формулу, утверждающую, что « x — элемент α -го идеала Фреше». Эта функция может быть определена по индукции следующим образом. Пусть

$$\Phi_0(x) = \bigvee_{n \in \omega} \left(\bigwedge_{i=1, \dots, n} \text{atom}(x_i) \ \& \ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \ \& \ x = x_1 \cup \dots \cup x_n \right),$$

где $\text{atom}(x)$ есть сокращение для $\forall y[(x \cap y = 0) \vee (x \cap y = x)]$. Формула $\Phi_{\alpha+1}(x)$ получается из $\Phi_\alpha(x)$ заменой всех вхождений $A = B$ равенством по модулю α -го идеала Фреше \mathcal{F}_α , т. е. формулой $\Phi_\alpha((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}))$. На предельных шагах β получаем $\Phi_\beta(x)$ как конъюнкцию всех формул $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma < \beta$. Можно проверить по индукции, что формула $\Phi_\alpha(x)$ определяет в каждой булевой алгебре α -й идеал Фреше.

Рассмотрим язык $L = \langle 0, s^1, +^2, \cdot^2, \cap^2, \cup^2, -^1 \rangle$ и его модель — стандартную модель арифметики, на которой операции $0, s^1, +^2, \cdot^2$ имеют их обычный смысл.

Теперь мы можем описать множество T предложений. Предложения первой части T утверждают, что элементы $s^k(0)$ образуют стандартную модель арифметики с обычными операциями $+, \cdot$ и что $\cap^2, \cup^2, -^1$ — вычислимые операции на ω , причем ω вместе с этими операциями образует булеву алгебру.

Вторая часть T — это семейство предложений, утверждающих, что для каждого $\alpha < \omega_1^{\text{СК}}$ множество $\mathcal{F}_{\alpha+1} \setminus \mathcal{F}_\alpha$ непусто.

По сказанному выше каждая часть T , содержащаяся в НУР_ω в качестве элемента, имеет модель. Значит, и все множество T имеет модель. Множество T утверждает, что эта модель вычислима. Ее ранг Барвайса в точности $\omega_1^{\text{СК}}$, поскольку по сказанному выше он не может быть меньше, чем $\omega_1^{\text{СК}}$, и, с другой стороны, ранг Барвайса вычислимой модели всегда меньше либо равен $\omega_1^{\text{СК}}$.

Обозначим эту булеву алгебру через \mathfrak{B} . По теореме 2.1 существуют кортежи элементов, которые автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны. Они, очевидно, имеют ненулевую длину. Теперь мы можем сократить число элементов в этих кортежах до 1. Будем использовать следующие обозначения:

$a^0 = a$, $a^1 = \bar{a}$. Поскольку всякий гиперарифметический изоморфизм между двумя кортежами a_1, \dots, a_m и b_1, \dots, b_m соответствует семейству гиперарифметических изоморфизмов между вычислимыми алгебрами $\mathfrak{B} \uparrow \left(\bigcap_{i=1, \dots, m} a_i^{\varepsilon_i} \right)$ и $\mathfrak{B} \uparrow \left(\bigcap_{i=1, \dots, m} b_i^{\varepsilon_i} \right)$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{0, 1\}$, эти булевы алгебры не гиперарифметически изоморфны по крайней мере для одной последовательности $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{0, 1\}$. Тогда элементы $\bigcap_{i=1, \dots, m} a_i^{\varepsilon_i}$ и $\bigcap_{i=1, \dots, m} b_i^{\varepsilon_i}$ автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны в \mathfrak{B} . Заметим, что вдобавок мы доказали существование двух изоморфных вычислимых булевых алгебр, не являющихся гиперарифметически изоморфными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barwise J. Admissible sets and structures. Berlin: Springer-Verl., 1975.
2. Ash C. J., Knight J. F. Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam: Elsevier, 2000.
3. Ершов Ю. Л., Гончаров С. С. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 2000.
4. Морозов А. С. Функциональные деревья и автоморфизмы моделей // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 1. С. 19–39.
5. Harrison J. Recursive pseudo-well-ordering // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. P. 526–543.
6. Barwise J., Moschovakis Y. N. Global inductive definability // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43, N 3. P. 521–534.
7. Sacks G. E. Higher recursion theory. Heidelberg: Springer-Verl., 1990.
8. Rogers L. The structure of p -trees: algebraic systems related to abelian groups // Abelian group theory / Proc. Second New Mexico State Univ. Conf. Las Cruces, NM, 1976. Berlin: Springer-Verl., 1977. P. 57–72. (Lecture Notes in Math.; 616).
9. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
10. Fuchs L. Infinite Abelian groups. New York: Acad. Press, 1970. V. 1.
11. Алаев П. Е. Ранги Скотта булевых алгебр // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1996. Т. 30. С. 3–25.
12. Гончаров С. С. Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.

Статья поступила 10 ноября 2004 г.

Гончаров Сергей Савостьянович, Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
goncharov@math.nsc.ru, morozov@math.nsc.ru

Valentina Harizanov
Department of Mathematics
The George Washington University
Washington, D.C. 20052, USA.
harizanv@gwu.edu

Julia F. Knight
Department of Mathematics
University of Notre Dame
Notre Dame, IN 46556, USA
knight.1@nd.edu

Анна Валерьевна Ромина
Max-Planck Institut für Informatik,
Stuhlsatzenhausweg 85, 66123 Saarbrücken, Germany
romina@yandex.ru