СООБЩЕНИЯ

DOI: 10.33048/alglog.2019.58.309 УДК 510.2:510.3:510.6

ТЬЮРИНГОВЫ СТЕПЕНИ ПОЛНЫХ ФОРМУЛ ПОЧТИ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ

С. С. ГОНЧАРОВ, Р. МИЛЛЕР, В. ХАРИЗАНОВА

Представлено Программным комитетом конференции „Мальцевские чтения“

В основе исследований по теории разрешимых моделей [1–3] лежат проблемы существования разрешимых и вычислимых моделей, а также проблемы их автоустойчивости. Будем использовать терминологию по теории конструктивных (вычислимых) и сильно конструктивных (разрешимых) моделей из [1], по теории моделей — из [4], по теории вычислимости — из [5]. Среди проблем существования особо отметим проблему существования вычислимых и разрешимых представлений [6].

А. Т. Нуртазин [7] получил полную характеризацию автоустойчивости относительно разрешимых представлений. В [7] установлено, что все модели, автоустойчивые относительно разрешимых представлений, почти просты, т. е. существует их конечное обогащение константами, в котором эта модель простая, и для автоустойчивости достаточно проверить разрешимость множества полных формул этих теорий. В [8–10] построены

*)Работа первого из авторов выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, проект 0314-2019-0002, Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-01-00247, и ННФ США DMS, грант No. 1600625; второго автора — при поддержке Simons Foundation, грант No. 581896, несколькими исследовательскими премиями PSC-CUNY, и ННФ США DMS, грант No. 1600625; третьего автора — при поддержке Simons Foundation, грант No. 429466, ННФ США DMS, грант No. 1600625, CCAS и Dean's Research Chair.

вычислимые модели, у которых имеется заданное конечное число неэквивалентных вычислимых представлений, а в случае наличия в точности двух неавтоэквивалентных вычислимых представлений и жёсткости модели существует единственный изоморфизм, и он устанавливает степень алгоритмического различия этих двух нумераций. Естественным образом возникли вопросы о том, всегда ли существует наименьшая тьюрингова степень, такая что все различные вычислимые представления изоморфны относительно этой степени, и о том, какие тьюринговы степени могут определять такие степени автоустойчивости модели. Интересно также исследовать степени автоустойчивости для моделей, не являющихся жёсткими. В [10, 11] построены нежёсткие группы, у которых точно два различных вычислимых представления. Тем не менее, тьюрингова степень автоустойчивости у этой группы равна степени функции, которая устанавливает эквивалентность двух однозначных вычислимых нумераций семейства в. п. множеств с точно двумя неавтоэквивалентными нумерациями [12].

Серия работ [13–20] посвящена вопросам изучения степеней автоустойчивости. В работе [21] построен первый пример простой модели, у которой существует ненулевая степень автоустойчивости относительно разрешимых представлений, и поставлены вопросы о степенях автоустойчивости относительно разрешимых представлений для почти простых моделей. Там же показано, что существуют почти простые разрешимые модели, у которых тьюрингова степень автоустойчивости относительно разрешимых представлений максимальна, т. е. равна степени множества полных формул. В связи с вопросом о сложности множества полных формул для разрешимых счётно категоричных теорий в [22, 23] были независимо построены счётно категоричные разрешимые теории с неразрешимым множеством полных формул. Н. А. Баженов [24] получил пример простой модели, у которой степени разрешимой автоустойчивости относительно разрешимых представлений не существует. Открытым остаётся вопрос о степенях разрешимой автоустойчивости простых моделей, когда такая степень существует, но отлична от степени полных формул. Открыты и вопросы о степенях разрешимой автоустойчивости для счётно категоричных разрешимых моделей и об их отличии от степеней автоустойчивости. Мы доказываем, что для любых вычислимо перечислимых тьюринговых степеней a, b существуют разрешимая теория и почти простые модели $\mathfrak{M}_1 \preceq \mathfrak{M}_2$ этой теории, у которых тьюринговы степени множеств полных формул в обогащениях константами этих моделей до простых моделей равны соответственно a, b, причём $\mathfrak{M}_1$ является простой моделью этой теории.

Напомним основные используемые понятия, следуя [1, 25]. Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ с нумерацией ν её основного множества называется *конструктивной*, если существует вычислимая функция, которая для каждого функционального сигнатурного символа позволяет по номерам элементов вычислить номер элемента, являющегося значением реализации в этой модели соответствующей операции, для каждого предикатного символа по номерам элементов — распознать выполнимость реализации этого предиката в данной модели на этих элементах, а для каждого константного символа — вычислить номер элемента, являющегося значением этого константного символа в этой модели. Тогда множество $D(\mathfrak{M}, \nu)$ истинных бескванторных предложений в обогащении сигнатуры константами для номеров элементов модели $D(\mathfrak{M}, \nu)$ разрешимо, т. е. существует алгоритм проверки истинности для бескванторных формул на элементах этой модели.

Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ называется *сильно конструктивной*, если существует алгоритм проверки истинности формул на элементах с заданными их номерами. Ясно, что сильно конструктивная модель является конструктивной, но обратное не верно. Отметим, что элементарная теория сильно конструктивной модели всегда разрешима. В литературе используются эквивалентные понятия вычислимой (рекурсивной) и разрешимой моделей [1]. Пусть $\mathfrak{A}$ — модель сигнатуры σ, а её основное множество A является подмножеством множества натуральных чисел N. Рассмотрим сигнатуру σ_A, полученную из сигнатуры σ добавлением константных символов $\{a_i \mid i \in A\}$. Заметим, что сигнатура σ_A является частью сигнатуры σ_N. Рассмотрим обогащение $\mathfrak{A}_A$ модели $\mathfrak{A}$ до сигнатуры σ_A, положив в качестве значения константы a_i элемент для каждого $i \in A$. Определим через $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A}_A)$ элементарную теорию обогащённой константами модели $\mathfrak{A}_A$, т. е. множество предложений сигнатуры σ_A, истинных в $\mathfrak{A}_A$. Модель $\mathfrak{A}$ называется *разрешимой* [26], если элементарная теория $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A}_A)$ модели $\mathfrak{A}_A$ сигнатуры σ_A разрешима.

Пусть $D(\mathfrak{A}_A) = \{\varphi \mid \varphi$ является бескванторным предложением сигнатуры σ_A и выполнено условие $\mathfrak{M} \models \varphi\}$. Модель $\mathfrak{A}$ называется *вычислимой* (*рекурсивной*) [3], если множество A рекурсивно, а множество бескванторных предложений $D(\mathfrak{A}_A)$ разрешимо.

Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ и $(\mathfrak{M}, \mu)$ — две нумерованные модели для модели $\mathfrak{M}$. Две конструктивизации ν и μ модели $\mathfrak{M}$ *автоэквивалентны*, если существуют рекурсивная функция f и автоморфизм λ модели $\mathfrak{M}$, такие что $\lambda\nu = \mu f$.

Модель называется *автоустойчивой* = *категоричной* (*относительно сильных конструктивизаций* = *разрешимо автоустойчивой* = *разрешимо категоричной*), если любые две (сильные) конструктивизации модели $\mathfrak{M}$ автоэквивалентны.

Теория называется *счётно категоричной*, если она полна и имеет единственную с точностью до изоморфизма счётную модель. Модель, полученную из модели $\mathfrak{M}$ добавлением в сигнатуру констант для конечного набора A элементов из $\mathfrak{M}$, будем называть *конечным обогащением модели $\mathfrak{M}$ константами* и обозначать $(\mathfrak{M}, \overline{a})_{a \in A}$, где $\overline{a}$ — конечный набор элементов $\mathfrak{M}$. Назовём $\mathfrak{M}$ *простой моделью* полной теории T, если она элементарно вкладывается в любую другую модель теории T.

Модель $\mathfrak{M}$ называется *атомной*, если для любого набора элементов $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$ существует формула $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, такая что $\mathfrak{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ и для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ вытекает, что

$$\mathfrak{M} \models (\forall x_1, \ldots, x_n)(\psi(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)),$$

такая $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ называется *полной формулой* теории этой модели. Модель будем называть *почти простой*, если она простая в некотором конечном обогащении константами.

В основе доказательства основного результата по независимости Тьюринговых степеней полных формул различных разрешимых почти простых моделей разрешимой теории лежит следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любого в. п. множества D существуют полная разрешимая теория T_D с простой разрешимой моделью $\mathfrak{N}_D$, которая разрешимо автоустойчива, неглавные разрешимые типы $p(x)$ и $q(x,y)$, такие что $p(x) \subseteq q(x,y)$, простая модель $\mathfrak{N}_{D,p}(c)$ теории $p(c)$ разрешима и является простой разрешимой моделью теории, тьюрингова степень множества полных формул этой почти простой модели $\mathfrak{N}_{D,p}(c)$ теории T_D и степень множества полных формул теории $p(c)$ равны тьюринговой степени множества D, множество полных формул теории $q(c,d)$ вычислимо, и разрешимая модель $\mathfrak{N}_{D,q}(c,d)$ является почти простой моделью теории $T_D \subseteq q(c,d)$ и разрешимо автоустойчива.*

Используя конструкцию прямых сумм теорий, отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любого набора в. п. множеств $D_0,\ldots,D_n$ существуют разрешимая теория $T^{(D_0,\ldots,D_n)}$ и расширяющаяся последовательность константных символов $\overline{a}_1 \subseteq \ldots \subseteq \overline{a}_n$, у которой простая модель $\mathfrak{M}_0$ разрешима, а тьюрингова степень множества полных формул теории $T^{(D_0,\ldots,D_n)}$ равна тьюринговой степени множества D_0, также имеется последовательность элементарных расширений почти простых разрешимых моделей $\mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{M}_1 \preceq \mathfrak{M}_2 \preceq \ldots \preceq \mathfrak{M}_n$, такая что для каждого $0 < k \leq n$ тьюрингова степень множества полных формул разрешимой теории $Th(\mathfrak{M}_k, \overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_k)$ в обогащениях конечным числом константных символов $\overline{a}_0,\ldots,\overline{a}_k$, для которых эта модель является простой, равна тьюринговой степени множества D_k.*

Рассмотрим теперь вопрос равномерной разрешимой категоричности для счётных моделей в рамках подхода из [27]. В дальнейшем будем рассматривать структуры с основным множеством ω. Поэтому мы можем рассматривать элементарную диаграмму $E(\mathfrak{M})$ языка $\mathcal{L}$-модели $\mathfrak{M}$ (с основным множеством ω), используя гёделевскую нумерацию как множество из 2^ω.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Счётная модель $\mathfrak{M}$ является *равномерно разрешимо категоричной*, если существует тьюрингов функционал Γ, такой что для любых моделей $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \cong \mathfrak{M}$, чьи основные множества равны ω, функция $\Gamma^{E(\mathcal{A})\oplus E(\mathcal{B})}$ является изоморфизмом из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

Обозначим через $C(\mathfrak{M})$ множество всех полных формул теории $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{M})$.

ТЕОРЕМА 4. *Счётная модель $\mathfrak{M}$ будет равномерно разрешимо категоричной тогда и только тогда, когда $C(\mathfrak{M}) \leq_T \mathrm{Th}\,(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{M}$ — простая модель теории $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{M})$.*

Теорема 4 может рассматриваться как аналог известного результата о равномерной вычислимой категоричности, который мы приведём ниже. Этот результат должен рассматриваться как фольклор и обсуждался в [27] как обобщение теоремы из [7].

ТЕОРЕМА 5. *Счётная модель $\mathcal{A}$ будет равномерно вычислимо категоричной тогда и только тогда, когда она имеет семейство Скотта $\mathfrak{H}$ конечных Σ_1-формул, которое (будучи подмножеством ω через некоторую гёделевскую нумерацию) сводится по перечислимости к множеству финитарной Σ_1-теории модели $\mathcal{A}$.*

СЛЕДСТВИЕ 6. *Счётная модель $\mathfrak{M}$ будет относительно разрешимо категоричной тогда и только тогда, когда для некоторого конечного набора новых константных символов $\vec{c}$ существует обогащение $(\mathfrak{M}, \vec{c})$ этими символами модели $\mathfrak{M}$, такое что $C(\mathfrak{M}, \vec{c}) \leq_T \mathrm{Th}\,(\mathfrak{M}, \vec{c})$ и $(\mathfrak{M}, \vec{c})$ — простая модель теории $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{M}, \vec{c})$.*

Определим теперь релятивизованную версию теоремы о разрешимой категоричности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть D — множество тьюринговой степени $\boldsymbol{d}$. Счётная модель $\mathfrak{M}$ называется *$\boldsymbol{d}$-равномерно разрешимо категоричной*, если существует тьюрингов функционал Γ, такой что для любых моделей $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \cong \mathfrak{M}$, чьи основные множества равны ω, функция $\Gamma^{D\oplus E(\mathcal{A})\oplus E(\mathcal{B})}$ является изоморфизмом из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 8. *Счётная модель $\mathfrak{M}$ будет $\boldsymbol{d}$-равномерно вычислимо* *категоричной тогда и только тогда, когда* $C(\mathfrak{M}) \leq_T D \oplus \mathrm{Th}\,(\mathfrak{M})$ *и* $\mathfrak{M}$ *— простая модель теории* $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{M})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Счётная модель $\mathfrak{M}$ является $\boldsymbol{d}$-разрешимо категоричной, если для любой вычислимой модели $\mathcal{A} \cong \mathfrak{M}$, существует $\boldsymbol{d}$-вычислимый изоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathfrak{M}$.

СЛЕДСТВИЕ 10. *Пусть* D *— множество тьюринговой степени* $\boldsymbol{d}$. *Счётная модель* $\mathfrak{M}$ *будет* $\boldsymbol{d}$*-разрешимо категоричной тогда и только тогда, когда для некоторого конечного набора константных символов* $\vec{c}$ *для обогащения* $(\mathfrak{M}, \vec{c})$ *модели* $\mathfrak{M}$ *выполнено* $C(\mathfrak{M}, \vec{c}) \leq_T D$ *и* $(\mathfrak{M}, \vec{c})$ *— простая модель теории* $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{M}, \vec{c})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов*, Конструктивные модели (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга, 1999.
2. *А. И. Мальцев*, О рекурсивных абелевых группах, Докл. АН СССР, **146**, № 5 (1962), 1009—1012.
3. *А. И. Мальцев*, Конструктивные алгебры. 1, УМН, **16**, № 3 (1961), 3—60.
4. *Г. Кейслер, Ч. Чен*, Теория моделей, М., Мир, 1977.
5. *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972.
6. *S. Goncharov, B. Khoussainov*, Open problems in the theory of constructive algebraic systems, in: P. A. Cholak (ed.) et al., Computability theory and its applications. Current trends and open problems. Proc. 1999 AMS-IMS-SIAM joint summer research conf. (Boulder, CO, USA, June 13-17, 1999), (Contemp. Math., **257**), Providence, RI, Am. Math. Soc., 2000, 145—170.
7. *А. Т. Нуртазин*, Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства, Алгебра и логика, **13**, № 3 (1974), 311—323.
8. *С. С. Гончаров*, Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций, Докл. АН СССР, **251**, № 2 (1980), 271—274.
9. *С. С. Гончаров*, Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций, Алгебра и логика, **19**, № 6 (1980), 621—639.

10. *С. С. Гончаров*, Группы с конечным числом конструктивизаций, Докл. АН СССР, **256**, № 2 (1981), 269—272.
11. *С. С. Гончаров, А. В. Молоков, Н. С. Романовский*, Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности, Сиб. матем. ж., **30**, № 1 (1989), 82—88.
12. *С. С. Гончаров*, Вычислимые однозначные нумерации, Алгебра и логика, **19**, № 5 (1980), 507—551.
13. *E. B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller*, Degrees of categoricity of computable structures, Arch. Math. Logic, **49**, No. 1 (2010), 51—67.
14. *B. F. Csima, J. N. Y. Franklin, R. A. Shore*, Degrees of categoricity and the hyperarithmetic hierarchy, Notre Dame J. Form. Log., **54**, No. 2 (2013), 215—231.
15. *Н. А. Баженов*, Степени категоричности суператомных булевых алгебр, Алгебра и логика, **52**, № 3 (2013), 271—283.
16. *B. Anderson, B. Csima*, Degrees that are not degrees of categoricity, Notre Dame J. Form. Log., **57**, No. 3 (2016), 389—398.
17. *E. Fokina, A. Frolov, I. Kalimullin*, Categoricity spectra for rigid structures, Notre Dame J. Form. Log., **57**, No. 1 (2016), 45—57.
18. *R. Miller*, **d**-computable categoricity for algebraic fields, J. Symb. Log., **74**, No. 4 (2009), 1325—1351.
19. *E. B. Fokina, V. Harizanov, A. Melnikov*, Computable model theory, in: R. Downey (ed.), Turing's Legacy: Developments from Turing's ideas in logic (Lect. Notes Log., **42**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, Assoc. Symbol. Logic, 2014, 124—194.
20. *Н. А. Баженов*, Спектры автоустойчивости булевых алгебр, Алгебра и логика, **53**, № 6 (2014), 764—769.
21. *С. С. Гончаров*, Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, в сб. Алгоритмические вопросы алгебры и логики. К 80-летию со дня рожд. акад. С. И. Адяна, Тр. МИАН, **274**, М., МАИК, 2011, 119—129.
22. *Е. А. Палютин*, Об алгебрах формул счетно категоричных теорий, Colloq. Math., **31**, fasc. 2 (1974), 157—159.
23. *J. H. Schmerl*, A decidable $\aleph_0$-categorical theory with a non-recursive Ryll-Nardzewski function, Fundam. Math., **98**, No. 2 (1978), 121—125.

24. *N. Bazhenov*, Prime model with no degree of autostability relative to strong constructivizations, in: A. Beckmann (ed.) et al., Evolving computability. 11th conf. comput. Europe (CiE 2015 Bucharest, Romania, June 29 – July 3, 2015), Proc. (Lect. Notes Comput. Sci., **9136**), Berlin, Springer-Verlag, 2015, 117—126.

25. *С. С. Гончаров*, Об автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций почти простых моделей, УМН, **65**, № 5(395) (2010), 107—142.

26. *M. Morley*, Decidable models, Israel J. Math., **25**, Nos. 3/4 (1976), 233—240.

27. *R. Miller*, Revisiting uniform computable categoricity: for the sixtieth birthday of prof. Rod Downey, in: A. Day (ed.) et al., Computability and complexity. Essays ded. R. G. Downey on the occasion of his 60th birthday (Lect. Notes Comput. Sci., **10010**), Cham, Springer, 2017, 254—270.

Поступило 8 августа 2019 г.

Окончательный вариант 24 сентября 2019 г.

Адреса авторов:

ГОНЧАРОВ Сергей Савостьянович,

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4,

Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 1,

г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ.

e-mail: s.s.goncharov@math.nsc.ru

MILLER, Russell,

Dep. Math., Queens College – C.U.N.Y., 65-30 Kissena Blvd., Flushing, New York, 11367,

Ph.D. Prog. Math. & Comp. Sci., C.U.N.Y. Graduate Center, 365 Fifth Avenue, New York, 10016,

USA.

e-mail: Russell.Miller@qc.cuny.edu

HARIZANOV, Valentina, Dep. Math., George Washington Univ., Washington, DC 20052, USA. e-mail: harizanv@gwu.edu